

TESIS
DOCTORAL

2005



UNIVERSIDAD DE GRANADA



SIMULACION DE ONDAS ELASTICAS EN VIGAS
MEDIANTE EL METODO DE REDES Y DETECCION DE
DAÑO MEDIANTE LA TRANSFORMADA WAVELET

Enrique Castro Rodríguez

Junio 2005

Directores: María Teresa García Hernández y Antolino Gallego Molina

Dña. MARÍA TERESA GARCÍA HERÁNDEZ, Doctora en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada y Profesora Titular del Departamento de Física de la Universidad de Jaén, y

D. ANTOLINO GALLEGO MOLINA, Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada y Profesor Titular del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Granada,

MANIFIESTAN:

Que la presente Tesis titulada “*SIMULACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS EN VIGAS MEDIANTE EL MÉTODO DE REDES Y DETECCIÓN DE DAÑO MEDIANTE LA TRANSFORMADA WAVELET*”, presentada por *ENRIQUE CASTRO RODRÍGUEZ* para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada, ha sido realizada bajo nuestra dirección.

Con esta fecha autorizamos la presentación de la misma.

Granada, 12 de Mayo de 2005

Fdo: María Teresa García Hernández

Fdo: Antolino Gallego Molina

Memoria presentada por **ENRIQUE CASTRO RODRÍGUEZ** para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.

Fdo: Enrique Castro Rodríguez

Resumen

La detección de daño en estructuras es un campo científico e industrial de gran interés práctico, ya que permite disminuir costos de mantenimiento y evitar riesgos para las personas y las propias estructuras. Por ello, se han desarrollado numerosas técnicas experimentales para poder conseguir este objetivo, dando lugar a una rama específica de los Ensayos No Destructivos (*Non-Destructive Testing, NDT*) denominada Detección de Daño en Estructuras (*Structural Health Monitoring, SHM*). Dentro de estas técnicas, son muy importantes las basadas en ultrasonidos, emisión acústica, o vibraciones de la estructura, las cuales en algunos casos permiten un monitoreado continuo y en tiempo real de la estructura.

En esta Memoria, se estudia el uso de vibraciones en barras para la detección de defectos en ellas. Se utiliza, por un lado, el *Método de Simulación por Redes (MSR)* como método numérico para simular la propagación de ondas longitudinales y transversales en la barra, y por otro, la *Transformada Wavelet (TW)* como herramienta matemática para el análisis de estas vibraciones con el objetivo de poder detectar, localizar y cuantificar el defecto presente en ella. Una parte de la Memoria se dedica al diseño, construcción y validación de los modelos en red requeridos por el MSR para la simulación, así como a la validación de los resultados obtenidos. Otra parte se dedica al estudio de la detección de defectos mediante la TW de señales espaciales y temporales de las vibraciones longitudinales libres y forzadas producidas.

Los resultados son muy satisfactorios, pues se ha comprobado que los modelos en red construidos representan adecuadamente este fenómeno físico, y que su simulación con el MSR conduce a resultados acordes con las expresiones teóricas. Así mismo, la TW ha probado ser una herramienta muy potente para el análisis de las señales de vibraciones, haciendo posible el desarrollo de metodologías que permitan la detección de defectos, incluso cuando su intensidad es muy baja, tanto a partir de señales espaciales como temporales.

Simulation of elastic waves in beams with the Network Simulation Method and fault detection with the Wavelet Transform

Abstract

Structural Health Monitoring is a scientific and industrial field of huge practical interest, due to the fact that it can reduce maintenance costs and prevent risks for people and structures. Many experimental techniques have been developed to achieve the objective of being able to detect faults and defects in structures. Among these techniques are those based on ultrasonics, acoustic emission or structural vibrations, which, in some cases, allow us to have a continuous monitoring of the structure in real time.

In this Thesis we study the use of vibrations in rods to detect the presence of defects in them, making use, on the one hand, of the *Network Simulation Method (NSM)* as a numerical method to simulate the propagation of longitudinal and transversal waves in the rod, and, on the other, of the *Wavelet Transform (WT)* as a mathematical tool to analyse these vibrations in order to detect, localise and measure the intensity of the defect of the rod. Thus, one part of this Thesis is about the design, construction and validation of the network models needed by the NSM for the simulation of the transversal and longitudinal vibrations in a rod, with a short analysis of the results. A second part is concerned with the study of the detection of faults in a rod through the WT of spatial and temporal signals of the longitudinal vibrations produced.

The results are very satisfactory, because the designed network models appropriately represent this physical process, and the simulation with the NSM gives results in agreement with the theoretical solutions. Likewise, the WT has proved to be a powerful mathematical tool for the vibrational signal analysis, making possible the development of methodologies to detect the defect, even when its intensity is very low, from the spatial and temporal signals.

A pesar de que como autor de esta memoria aparezca una única persona, es bien sabido que la culminación de una tesis doctoral sería imposible sin la colaboración de otras muchas, las cuales, entre otras cosas, hacen posible que el autor adquiriera los conocimientos necesarios, le orientan en su investigación y en los distintos aspectos que involucra la escritura de la tesis, le animan para llevarla a cabo y, en último término, le soportan durante este proceso.

Así pues, es un acto de justicia mencionar a las personas que han colaborado de una forma u otra en que esta tesis doctoral sea una realidad y mostrarles mi agradecimiento. Por tanto, en esta página nombraré a las personas que, por así llamarlo, han proporcionado una ayuda profesional, aunque su aportación en el aspecto personal también ha sido fundamental, mientras que a las que han proporcionado un apoyo “meramente” personal, aunque sin duda fundamental, les dedico esta memoria y los cuatro años de trabajo que ha requerido.

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores de tesis, M^a Teresa García Hernández, que me inició en el MSR y animó a continuar cuando simulación y teoría no parecían ponerse de acuerdo, y Antolín Gallego Molina, que me introdujo en el mundo de la detección de daño, el tratamiento de señal y la TW y ha sufrido la finalización de la tesis doctoral como si fuera la suya propia. Aunque suene a tópico, su apoyo y ayuda ha sido fundamental para poder presentar esta memoria.

También quiero nombrar a las personas con la que he colaborado en diferentes proyectos de investigación. Así, a los participantes en el proyecto DIDA, Amadeo Benavent, José Luís Pérez Aparicio y Guillermo Rus, con los cuales he aprendido bastantes aspectos de la detección de daño y de la experimentación con vibraciones, y cuyos conocimientos y vocación de trabajo hacen de ellos un ejemplo a seguir. Y también a los colaboradores en las distintas acciones integradas de la Universidad de Granada, Rosa Pietrkowski, Juan de Mata Vico Rodríguez y José Francisco Gil Villaverde, con los que me he iniciado en esa disciplina tan fascinante como difícil de interpretar como es la emisión acústica, y que constituyen un grupo heterogéneo por su edad, conocimientos y preparación, pero muy homogéneo por su capacidad de trabajo, por la ayuda que son capaces de prestar y por la sabiduría latente en cada uno de ellos.

A mis padres
A mis hermanas
A Raquel y Enrique

Esta Tesis se ha financiado parcialmente a través del proyecto del Plan Nacional de Producción Industrial del Ministerio de Ciencia y Tecnología en el periodo 2002/2005 titulado “*Diagnóstico de daño en estructuras de alta responsabilidad hechas de material compuesto (DPI2002-04472-C02-02)*” y el proyecto del Plan Propio de Investigación 2004 de la Universidad de Granada titulado “*Aplicación del método de simulación por redes y la transformada wavelet a la detección de daño estructural (30.PP.OO.5200)*”.

Índice

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación: La detección de daño	1
1.2. El Método de Simulación por Redes (MSR)	6
1.3. La Transformada Wavelet (TW)	7
1.4. La TW en detección de daño con vibraciones: estado actual	8
1.5. Objetivos	10
1.6. Organización de la Memoria	11
Referencias	13

Capítulo 2: EL MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES

2.1. Introducción	19
2.1.1. Termodinámica de redes	21
2.1.2. Simulación	22
2.2. Metodología	26
2.2.1. Monopuertas básicas	29
2.2.1.1. Monopuertas pasivas	29
a. Monopuerta resistiva	29
b. Monopuerta capacitiva	30
c. Monopuerta inductiva	31
2.2.1.2. Monopuertas activas	31
a. Fuente independiente de fuerza	31
b. Fuente dependiente de fuerza	32
c. Fuente independiente de flujo	32
d. Fuente dependiente de flujo	32
2.2.2. Programación y simulación	33
Referencias	34

Capítulo 3: VIBRACIONES EN BARRAS

3.1. Introducción	37
3.2. Vibraciones longitudinales	38
3.2.1. Introducción	38
3.2.2. Deducción de la ecuación del movimiento	39
3.2.3. Solución de la ecuación del movimiento	41
3.2.3.1. Vibraciones libres	42
3.2.3.2. Vibraciones forzadas	45
3.2.3.3. Soluciones para casos particulares	47
a. Barra fija-fija	48
b. Barra libre-fija	49
c. Barra libre-libre	52
d. Barra libre-carga másica	55
3.3. Vibraciones transversales	56

ÍNDICE

3.3.1. Introducción	56
3.3.2. Modelo Euler-Bernouilli	56
3.3.2.1. Deducción de la ecuación del movimiento	56
3.3.2.2. Vibraciones libres	58
3.3.2.3. Vibraciones forzadas	60
3.3.2.4. Algunos casos particulares	61
a. Barra apoyada en los dos extremos	61
b. Barra con un extremo amordazado y el otro con carga	
másica	64
3.3.3. Modelo de Timoshenko	65
3.3.3.1. Deducción de la ecuación del movimiento	65
3.3.3.2. Adimensionalización y desacoplamiento	68
3.3.3.3. Vibraciones libres	70
3.3.3.4. Vibraciones forzadas	72
3.3.3.5. Algunos casos particulares	73
a. Barra apoyada en los dos extremos	73
b. Barra con un extremo amordazado y el otro con carga	
másica	78
Referencias	80

Capítulo 4: La Transformada Wavelet

4.1. Introducción	81
4.2. Los orígenes	83
4.2.1. Transformada de Fourier (TF)	84
4.2.2. Transformada de Fourier en tiempos cortos (SFTF)	86
4.3. Transformada Wavelet	87
4.3.1. Transformada Wavelet continua (CWT)	89
4.3.2. Transformada Wavelet discreta (DWT)	92
4.3.3. Transformada Wavelet rápida (FWT)	93
4.3.3.1. Descomposición wavelet	93
4.3.3.2. Reconstrucción wavelet	95
4.3.4. Wavelets y filtros	95
4.3.5. Descomposición wavelet ortogonal (OWD)	96
4.3.6. Regularidad y momentos nulos	97
4.3.7. Detección de singularidades	97
4.3.8. Familias de wavelets	99
Referencias	105

Capítulo 5: Simulación de vibraciones longitudinales en barras con el MSR

5.1. Introducción	107
5.2. Celda elemental para las vibraciones longitudinales de una barra	108
5.3. Celda elemental con variables adimensionales	113
5.4. Simulación de vibraciones longitudinales en una barra fija-fija	114
5.4.1. Modelo en red	114
5.4.2. Simulación de vibraciones libres	115
5.5. Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-fija	117

5.5.1. Modelo en red	117
5.5.2. Simulación de vibraciones forzadas	119
5.5.2.1. Aplicación de una fuerza senoidal	119
5.5.2.2. Aplicación de una fuerza tipo pulso	123
5.6. Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-libre	127
5.6.1. Modelo en red	127
5.6.2. Simulación de vibraciones forzadas	128
5.6.2.1. Aplicación de una fuerza senoidal	129
5.6.2.2. Aplicación de una fuerza tipo pulso	131
5.7. Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-carga másica	133
5.7.1. Modelo en red	133
5.7.2. Simulación de vibraciones forzadas	136
5.7.2.1. Aplicación de una fuerza senoidal	136
5.7.2.2. Aplicación de una fuerza tipo pulso	139
5.7.3. Validación del modelo en red para la barra libre-carga másica	142
5.8. Conclusiones del capítulo	143
Referencias	145

Capítulo 6: Simulación de vibraciones transversales en barras con el MSR

6.1. Introducción	147
6.2. Modelo de Euler-Bernouilli	148
6.2.1. Celda elemental	148
6.2.2. Celda elemental con variables adimensionales	152
6.2.3. Barra apoyada en los dos extremos	153
6.2.3.1. Modelo en red	153
6.2.3.2. Simulación de vibraciones libres	154
6.2.3.3. Simulación de vibraciones forzadas	155
a. Aplicación de una fuerza senoidal	155
b. Aplicación de una fuerza tipo pulso	158
6.2.4. Barra con un extremo amordazado y el otro con una masa puntual	161
6.2.4.1. Modelo en red	161
6.2.4.2. Simulación de vibraciones forzadas	162
a. Aplicación de una fuerza senoidal	163
b. Aplicación de una fuerza tipo pulso	165
c. Validación del modelo en red para la barra amordazada-	
carga másica	167
6.3. Modelo de Timoshenko	168
6.3.1. Celda elemental	168
6.3.2. Barra apoyada en los dos extremos	172
6.3.2.1. Modelo en red	172
6.3.2.2. Simulación de vibraciones libres	173
6.3.2.3. Simulación de vibraciones forzadas	175
a. Aplicación de una fuerza senoidal	175
b. Aplicación de una fuerza tipo pulso	179
6.3.3. Barra con un extremo amordazado y otro con una masa puntual	183
6.3.3.1. Modelo en red	183
6.3.3.2. Simulación de vibraciones forzadas	184

a. Aplicación de una fuerza senoidal	184
b. Aplicación de una fuerza tipo pulso	187
c. Validación del modelo en red para la barra amordazada-	
carga másica	191
6.4. Conclusiones del capítulo	192
Referencias	194

Capítulo 7: Detección de defectos mediante vibraciones longitudinales

7.1. Introducción	197
7.2. Modelado de defectos con el MSR: cambios de densidad y rigidez	200
7.3. Detección de defectos mediante vibraciones libres	202
7.3.1. Con señales espaciales	203
7.3.1.1. Influencia del tipo de función base	209
a. Estudio con un defecto en la densidad	210
b. Estudio con dos defectos en la densidad	212
c. Estudio con tres defectos en la densidad	214
d. Decisión sobre la función base a usar	215
7.3.1.2. Influencia de la escala	215
a. Defecto tipo densidad	216
b. Defecto tipo rigidez	218
7.3.1.3. Influencia sobre el orden del modo	221
a. Defecto tipo densidad	223
b. Defecto tipo rigidez	232
7.3.1.4. Defectos cercanos a los extremos	239
7.3.1.5. Defectos próximos entre sí	241
7.3.1.6. Más de dos defectos	243
7.3.2. Con señales temporales	244
7.3.2.1. Defecto tipo densidad	245
a. Estudio con el primer modo	245
b. Estudio con el segundo, tercer y cuarto modo	253
c. Estudio con el quinto, sexto, séptimo y octavo modo	256
7.3.2.2. Defecto tipo rigidez	259
a. Estudio con el primer modo	259
b. Estudio con el segundo, tercer y cuarto modo	261
c. Estudio con el quinto, sexto, séptimo y octavo modo	264
7.4. Detección de defectos mediante vibraciones forzadas	267
7.4.1. Con señales espaciales	268
7.4.1.1. Defecto tipo densidad	269
a. Fuerza senoidal de frecuencia 0.4	269
b. Fuerza senoidal de frecuencia 0.7	271
c. Fuerza senoidal de frecuencia 1.3	272
d. Fuerza senoidal de frecuencia 3.14	274
e. Fuerza senoidal de frecuencia 4.85	276
f. Comparación entre las distintas fuerzas senoidales	278
g. Pulso gaussiano	280
7.4.1.2 Defecto tipo rigidez	282
a. Fuerza senoidal de frecuencia 0.4	282

ÍNDICE

b. Fuerza senoidal de frecuencia 0.7	282
c. Fuerza senoidal de frecuencia 1.3	285
d. Fuerza senoidal de frecuencia 3.14	286
e. Fuerza senoidal de frecuencia 4.85	288
f. Comparación entre las distintas fuerzas senoidales	289
g. Pulso gaussiano	292
7.4.2. Con señales temporales	293
7.4.2.1. Defecto tipo densidad	299
a. Fuerza senoidal de frecuencia 0.4	299
b. Fuerza senoidal de frecuencia 0.7	300
c. Fuerza senoidal de frecuencia 1.3	301
d. Fuerza senoidal de frecuencia 3.14	303
e. Fuerza senoidal de frecuencia 4.85	304
f. Pulso gaussiano	305
g. Comparación entre las distintas fuerzas	306
7.4.2.2. Defecto tipo rigidez	306
a. Fuerza senoidal de frecuencia 0.4	306
b. Fuerza senoidal de frecuencia 0.7	307
c. Fuerza senoidal de frecuencia 1.3	308
d. Fuerza senoidal de frecuencia 3.14	310
e. Fuerza senoidal de frecuencia 4.85	311
f. Pulso gaussiano	312
g. Comparación entre las distintas fuerzas	313
7.5. Conclusiones del capítulo	313
7.5.1. Resultados para las vibraciones libres	313
7.5.1.1. TW de las señales espaciales	313
7.5.1.2. TW de las señales temporales	315
7.5.2. Resultados para las vibraciones forzadas	315
7.5.2.1. TW de las señales espaciales	315
7.5.2.2. TW de las señales temporales	316
Referencias	317
Capítulo 8: Conclusiones y perspectivas de trabajo futuro	319
8.1. Conclusiones	319
8.2. Perspectivas de trabajo futuro	322
Publicaciones del autor en el tema de la tesis	325

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

1.1.- Motivación: La detección de daño

Son muchos los sectores donde se demandan materiales y estructuras de alta responsabilidad. Entre ellos quizás el más destacado es el aeronáutico, en el que se requieren materiales de baja densidad, alta resistencia y rigidez, tales como los materiales compuestos. Sin embargo, sus propiedades mecánicas, y por tanto su operatividad, pueden verse considerablemente degradadas en presencia de daño (una delaminación interna debida a un impacto, por ejemplo) [1.1]. Esto introduce cambios en la rigidez y amortiguamiento de la estructura, causando variaciones en sus resonancias naturales (coeficientes de amortiguamiento y modos propios), las cuales en general son pequeñas y difíciles de detectar.

Otro ejemplo de enorme interés social en el que la detección de daño juega un papel fundamental es la construcción de edificios y obras de Ingeniería Civil, especialmente en el caso en que puedan estar afectadas por terremotos pues su

destrucción puede causar un elevado número de víctimas y pérdidas económicas. Tras los tristemente famosos terremotos de Northridge (USA) y Kobe (Japón) y descubrirse que muchas estructuras tenían sus uniones dañadas por roturas frágiles (defectos de soldadura, deficiencias en los materiales, etc.) se realizaron campañas visuales extensivas de detección del daño presente en edificios, incluso aparentemente intactos [1.2, 1.3], que fueron tremendamente lentas y costosas. Esto motivó la introducción de nuevos sistemas de construcción antisísmicos, que sin embargo no han disminuido al 100% el riesgo de roturas frágiles en las uniones.

Por ello, tras un fuerte terremoto se hace absolutamente necesario evaluar rápidamente el estado de las construcciones, con objeto de evitar los riesgos derivados de sus posibles réplicas. El diagnóstico permite realizar las inspecciones y reparaciones solo en las zonas en que se ha detectado daño. Se requiere, por tanto, desarrollar métodos postsísmicos diferentes a la simple, lenta y costosa inspección visual para identificar daño en estructuras de edificios y obras de Ingeniería Civil, que sean económicos, rápidos y eficientes.

El tema no es nuevo, y por ejemplo existen grandes presas con inclinómetros produciendo registros que cuando varían anómalamente producen alarmas. También podemos citar los depósitos criogénicos reutilizables de fibra de carbono ensayados por la NASA en el X-33, prototipo a escala del lanzador espacial Orbiter. En este caso la estructura lleva sensores de fibra óptica que informan sobre su estado y sobre posibles fugas de hidrógeno.

No cabe duda de que la detección del daño en materiales y estructuras es un aspecto de gran interés práctico pues permite disminuir los costes de su mantenimiento, así como los riesgos de la propia estructura, de sus usuarios y del personal de mantenimiento. Este es un aspecto que en Ingeniería en general, y en el diseño y producción industrial en particular, no pasa desapercibido y que ha sido objeto de estudio en muchas investigaciones desde hace algo más de dos décadas, desarrollándose múltiples técnicas de lo que genéricamente se denominan “Ensayos No Destructivos (NDT del término inglés *Non-Destructive Testing*)” o “Detección de daño (SHM del término inglés *Structural Health Monitoring*)”.

Los métodos de detección de daño incluyen *técnicas locales y globales*. Las primeras van desde la simple inspección visual de la estructura (algo muy habitual todavía en Ingeniería Civil), hasta las técnicas de ultrasonidos, emisión acústica, corrientes inducidas, termografía, métodos electromagnéticos, líquidos penetrantes, etc [1.4]. Tienen en común que inspeccionan la estructura en intervalos de tiempo y posiciones fijas, y su aplicación requiere una localización previa de las zonas dañadas. Suelen ser, además, lentas y caras, y de uso limitado. En contraste, durante la última década ha tomado mucha fuerza la idea de inspeccionar la “salud” de toda la estructura de manera continuada en el tiempo, extrayendo características de la misma que permitan aportar permanentemente conclusiones sobre su estado y, por tanto, sobre su tiempo de vida y la necesidad de eventuales reparaciones. Es lo que se denominan *técnicas globales* de detección de daño, entendidas como sistemas integrados a la estructura que permitan detectar la aparición de fallos que supongan riesgo [1.5]. Son, en general, métodos cuyo fundamento físico reside en que el daño altera las propiedades físicas de las estructuras (rigidez o amortiguamiento), produciéndose variaciones en su respuesta dinámica. Es decir, la “salud” de la estructura se puede analizar a partir de los cambios de sus características dinámicas. En general, en este proceso de detección de daño, se requiere:

-*Excitar a la estructura*, bien sea naturalmente (viento, terremotos, ruido ambiental, etc.) o de manera artificial (mediante impacto o actuadores piezoeléctricos).

-*Recoger su respuesta*, mediante sensores adecuados y ubicados estratégicamente, transmitiéndola y almacenándola en una unidad central.

-*Procesar las señales adquiridas*, introduciendo variables características que sean sensibles a los mecanismos de daño esperados.

-*Introducir y aplicar algoritmos para la identificación* del daño a partir de las variables características. Este proceso es un problema inverso y no lineal, cuya solución explícita, o no existe, o es muy complicada de obtener.

De acuerdo con Rytter [1.4], existen 4 niveles o grados de diagnóstico de daño:

-**Nivel 1:** detección de la existencia de daño. *¿Existe daño?*.

-**Nivel 2:** localización del daño. *¿Dónde está el daño?*.

-**Nivel 3:** extensión del daño. *¿A qué zona afecta el daño?*.

-**Nivel 4:** pronóstico del tiempo de vida restante de la estructura. *¿Cómo va a evolucionar el daño?*.

Como argumenta Frietzen [1.6,1.7], son muchos los problemas aún sin resolver en cada uno de estos cuatro niveles. Por ejemplo, en el Nivel 1, el reto actual es aumentar la sensibilidad y poder detectar daños de pequeña envergadura en estados iniciales, sin que el proceso elaborado nos proporcione falsas alarmas, algo muy común en materiales compuestos usados en estructuras de elevada responsabilidad. Son muchos los trabajos que podemos encontrar en los últimos años que abarcan el tema de detección de daño, lo que pone de manifiesto su interés y actualidad [1.4-1.13].

Existen varios procedimientos para abordar la detección de existencia de daño dependiendo del tipo de estructura. Quizás los más desarrollados son los que se basan en extraer las frecuencias naturales y modos propios de vibración de la estructura, intentando observar variaciones de los mismos cuando la estructura está dañada [1.4,1.11,1.13]. No obstante, cuando el tamaño del defecto es pequeño, estos procedimientos con los tratamientos de señal que habitualmente se usan, no llegan a tener la suficiente capacidad de discriminación. Es por ello que recientemente están teniendo cierto auge los procedimientos basados en las perturbaciones que un defecto puede producir en una onda elástica transitoria que se propaga por la estructura [1.6]. No obstante, el desarrollo de estas técnicas no es el mismo que el de las primeras, fundamentalmente por la escasez de algoritmos capaces de correlacionar la respuesta experimental de la estructura con su daño y llevar esta información a algo útil, sin falsas alarmas. En definitiva, para aumentar la sensibilidad a la existencia del defecto, e incluso para mejorar su ubicación (Nivel 2), se requiere introducir *modelos computacionales*, tal y como sugieren Frietzen y Chang [1.5,1.7]. Además, estos modelos deben ir en una doble dirección. Por un lado, partiendo de modelos físicos adecuados, se precisa introducir activa e intensamente la participación de *métodos numéricos*. De una revisión bibliográfica, se deduce que los investigadores en SHM no

suelen tener un alto conocimiento en la aplicación de métodos numéricos, usando programas comerciales no diseñados para esta aplicación. Por otro lado, tal y como argumenta Fritzen en [1.7], se hace necesaria la participación en el problema de *técnicas avanzadas de tratamiento de señales* que permitan aumentar la capacidad de discriminación entre estructuras dañadas y no dañadas, a partir de un análisis más eficaz de los datos captados por los sensores. En este trabajo, por ejemplo, Fritzen brillantemente aplica una teoría matemática desarrollada por Basseville en [1.9] conocida como “Detección de Fallo basada en subespacios”, al caso de detección de daño en una estructura de material compuesto excitada por una señal aleatoria. No obstante, existen otras tentativas exitosas basadas en la aplicación de modelos ARMA [1.8], transformaciones tiempo-frecuencia de la señal y vectores de Ritz [1.13], que demuestran claramente que la participación de técnicas avanzadas de tratamiento de señal introduce mejoras muy considerables.

De hecho, según Fritzen, son tres los pilares básicos sobre los que se debe asentar una técnica de SHM eficiente, teniendo en cuenta que el fallo de uno induciría el fallo total de la técnica:

-*Medidas precisas de los datos*, lo que requiere de experimentos e instrumental de calidad .

-Manejar un *modelo físico-matemático de referencia* que se obtiene adaptando un modelo numérico inicial del problema a los datos disponibles en una base de estructuras no dañadas. Esto requiere desarrollar *métodos numéricos eficaces* y usar modelos físicos adecuados y cercanos a la realidad.

-Usar *algoritmos eficientes para extraer parámetros de daño*, usando tanto los datos medidos como los del modelo numérico. Es decir, usar tratamientos de señal altamente discriminantes entre señales parecidas.

En el estado actual, avalado por los trabajos que hemos citado y que son de reciente publicación, la propuesta realizada en esta tesis es la de incorporar al problema de SHM las siguientes metodologías:

-El Método de Simulación por Redes (MSR) para la modelización de vibraciones en estructuras. El objetivo es introducir este método, ampliamente validado en otras disciplinas físicas, para tratar de obtener mejoras sobre otros métodos.

-La Transformada Wavelet (TW) como técnica avanzada de tratamiento de señales para la discriminación de señales de vibración generadas por estructuras intactas y dañadas. Esta técnica está muy desarrollada y aplicada en otros campos, detectándose como una técnica muy válida para este fin, tal y como se refleja en algunos trabajos ya publicados por otros autores.

1.2.- El Método de Simulación por Redes (MSR)

Este método numérico se basa en la elaboración de un modelo en red eléctrica equivalente al proceso físico en estudio, y su posterior simulación mediante un programa de resolución de circuitos (por ejemplo, PSPICE). Se considera un modelo en red equivalente al proceso físico estudiado cuando las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan y las ecuaciones de la red elemental coinciden. Esta equivalencia determinará el campo de aplicación del método y establecerá la validez del modelo en red. La técnica deriva de las teorías de Peusner [1.14], conocidas como *Termodinámica de Redes*, y en ningún caso debe ser confundido con la tradicional y clásica analogía electro-mecánica. El MSR es en esencia y en desarrollo, *un método numérico* [1.15].

Para obtener el modelo en red, partiendo del modelo matemático que proporciona la descripción física del proceso, se elabora la celda en red elemental, es decir, la correspondiente al proceso localizado en un volumen elemental. Para ello, las ecuaciones matemáticas con las variables independientes posición y tiempo, son discretizadas según la metodología de diferencias finitas, respecto de la variable posición, quedando continua la variable tiempo. Esta dependencia es finalmente resuelta por el programa PSPICE (esta es la diferencia fundamental con otros métodos numéricos, por ejemplo, el de elementos finitos). La asociación de tales redes elementales describirá el proceso en un medio finito, siendo la descripción tanto más exacta cuanto mayor sea el número de celdas elementales conectadas. El método tiene la ventaja de que el PSPICE es un sofisticado programa de simulación de redes, de altas

prestaciones, con continuos reajustes del tamaño de paso, y con compensación automática de situaciones de “overflow” y “underflow”.

El MSR ha sido usado para la resolución de problemas tanto lineales como no lineales en diferentes procesos físicos, de los que resaltaremos su aplicación al estudio de procesos de electrodo [1.16], fenómenos de transporte en membranas [1.17] y fenómenos de transferencia de calor [1.18], en todos ellos con excelentes resultados.

Sin embargo, el método aún no se había usado para la simulación de vibraciones en sólidos y mucho menos para la simulación en situaciones en que existen defectos locales o cualquier tipo de daño estructural [1.19]. Conviene señalar las citas que dan los libros de Bockris [1.20] y Bard [1.21] de 1998 y 1999 sobre el MSR en capítulos denominados “*Numerical simulation-Recent Advances*”.

1.3.- La Transformada Wavelet (TW)

La historia de las wavelets (u ondículas, como algunos autores traducen), no es muy vieja, entre 10 y 15 años. Durante este tiempo son muchos los éxitos para la comunidad científica en campos muy diversos. Entre otros: Biología (distinción entre membranas patológicas y sanas), Metalurgia (caracterización de superficies rugosas), Finanzas (para detectar propiedades de rápida evolución de valores económicos), Internet (descripción del tráfico en la red), Industria (supervisión de rodamientos; procesos de control de calidad no destructivo), Medicina (detección de crisis epilépticas, detección de anomalías en EEG y ECG, detección de tumores en mamografías, interpretación de imágenes de RSM, etc.), Radar y Sónar (Detección automática), entre otros. La pregunta es, *¿por qué de este éxito?*. En todas estas y en muchas otras aplicaciones, el reto es obtener información útil a partir de la respuesta (señal) de un sistema físico (entendido en el sentido más general del término), que llega “escondida”, bien por otras señales, o por ruido. El análisis de señal ya tiene un gran arsenal de técnicas a su disposición para ello. Quizás la más popular es la Transformada de Fourier (TF), que descompone la señal en senos de diferente frecuencia, algo que ha sido y sigue siendo extremadamente útil ya que el contenido en frecuencia de la señal es muy importante para describir el fenómeno físico. Sin embargo, tiene una importante limitación: al transformar a la frecuencia, el tiempo se pierde totalmente, y por tanto, al

mirar una TF, es imposible decir cuándo ocurre un determinado suceso. Si la señal es estacionaria, esto no tiene importancia. Pero, sin embargo, si la señal contiene características no estacionarias o transitorias (arrastres, tendencias, cambios abruptos, comienzo y fin de sucesos, etc.), la TF es insuficiente, ya que no puede detectarlas. Para ello, aunque se hicieron interesantes tentativas para superarlo como la Transformada de Gabor, la forma más lógica la representa la TW, que basada en el uso de una técnica de ventaneo de la señal con intervalos de tamaño variable, permite usar intervalos de tiempo grandes cuando deseamos información precisa a baja frecuencia, e intervalos cortos cuando deseamos información de alta frecuencia. Quizás su mayor ventaja es su capacidad para realizar un *análisis local de la señal*, pudiendo revelar aspectos de los datos que otras técnicas pierden, como son tendencias, puntos de ruptura, *discontinuidades en altas frecuencias*, comparación entre señales muy similares, eliminación de ruidos, compresión de señales, etc. Son interminables las citas que podríamos incluir sobre fundamentos y aplicaciones de la TW. Baste citar, por ejemplo, los libros de Meyer [1.22], considerado como el padre de los libros de wavelets, y el de Kaiser [1.23], por ser un libro orientado hacia la Física.

1.4.- La TW en detección de daño con vibraciones: estado actual

Los métodos de SHM más usuales son los de ultrasonidos [1.6] y los basados en vibraciones [1.4]. Los métodos basados en vibraciones son, en general, más adecuados para grandes estructuras que los basados en ultrasónicos, pues los ultrasonidos decaen relativamente rápido y llegan a ser indetectables. Los métodos vibracionales están basados en que cualquier daño en una estructura produce un incremento local en la flexibilidad, induciendo cambios en sus propiedades dinámicas, es decir, cambios específicos en sus frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y en la forma de sus modos de vibración. El análisis de tales cambios puede usarse para la identificación del daño. Dentro de los métodos de vibraciones, los más extendidos son aquellos que usan los cambios en las frecuencias naturales, por cuanto son relativamente fáciles de obtener y sensibles al daño local y global. Entre sus inconvenientes está que cualquier cambio en la masa estructural, aunque no provenga de un daño, se verá reflejado en ellas. Otra posibilidad es usar los modos de vibración. Este tipo de métodos ha ido aumentando conforme se iba mejorando la precisión y la rapidez de los sistemas de

medida. No obstante, presentan los inconvenientes de que hay que medir en muchos puntos de la estructura para obtenerlos (alto número de sensores), la baja precisión de los modos respecto de las frecuencias naturales, y la menor sensibilidad al daño. Hay trabajos en los que se usan simultáneamente frecuencias y modos de vibración [1.24].

Esta relación directa entre el daño y la respuesta vibracional, conocido como Análisis Modal [1.11], es especialmente adecuada si la región dañada es grande. Sin embargo, si el defecto es muy pequeño (por ejemplo, una fractura en sus primeros estadios) puede estar muy localizado y las señales de vibración inducidas son no estacionarias, mientras que los datos modales son globales y estacionarios. Además, los defectos de muy baja intensidad apenas si tienen influencia en los modos de bajo orden, perturbando solo los modos de orden alto. Los últimos modos no pueden medirse fácilmente, y además se enmascaran con el ruido generado. Resumiendo, cuando el daño solo produce pequeñas variaciones de las propiedades mecánicas, es difícilmente detectable por métodos modales. Para estos problemas, el análisis wavelet parece ser una herramienta prometedora que permite la detección y localización de daño. Su principal ventaja es su aplicabilidad al análisis local de una señal [1.22, 1.23].

Fue Newland el primero en aplicar la TW a las señales de vibración [1.25], aunque su trabajo no estaba específicamente dirigido a la detección de daño. Los primeros artículos que se ocuparon de ello fueron los de Surace y Ruotolo [1.26], Wand y McFaddeen [1.27] y Liew y Wang [1.28]. Estos últimos autores aplican la TW espacial, específicamente a la identificación de fracturas en estructuras. Usan las vibraciones libres de vigas fracturadas con una reducción local de la rigidez, mostrando que los coeficientes wavelet calculados a lo largo de la viga presentan un máximo justamente en la localización de la fractura. Otros artículos que tratan con vigas, láminas y estructuras articuladas han validado esta técnica, convirtiéndola en una herramienta de investigación prometedora [1.26-1.47]. Debe enfatizarse, sin embargo, que la mayoría de los trabajos describen la aplicación de TW a las señales donde el desplazamiento, tensión o aceleración se calculan en función de la posición en determinados instantes de tiempo (es decir, la TW espacial). Son pocos los trabajos encontrados en la literatura especializada en los que se haya usado la TW en el dominio del tiempo para analizar las señales de vibración medidas en diferentes localizaciones, ya que es más complicado localizar el daño con este tipo de cálculo.

Una de las aportaciones de esta tesis es su aplicación al caso de vibraciones forzadas. En la bibliografía sobre la aplicación de la TW a vibraciones en barras para la detección de defectos, en casi todos los trabajos, de una u otra forma, se trabaja con los modos de vibración de la barra, o en situaciones estáticas [1.19]. Hasta la fecha existe muy poca documentación sobre la posibilidad de detectar daño mediante vibraciones forzadas. En nuestra opinión esto es una laguna, ya que experimentalmente estas vibraciones son más fáciles de generar. De hecho, en muchas de las ocasiones en que se usan vibraciones naturales, la barra es excitada con fuerzas armónicas cuyas frecuencias coinciden con las frecuencias naturales de la barra [1.34].

Hay ciertas diferencias entre trabajar con vibraciones libres y forzadas. En el primer caso, las ondas son estacionarias y no cambian su forma a lo largo del tiempo, mientras que en el segundo la forma de la onda en cada punto de la barra varía considerablemente a lo largo del tiempo. Esta variación significa que, inicialmente, no hay forma de saber con certeza si la detección del defecto va a ser posible. Otro problema adicional es que los resultados varían considerablemente dependiendo del tiempo o de la posición elegidos para medir la onda, así como del tipo de fuerza aplicada.

1.5.- Objetivos

El objetivo fundamental de esta tesis es aportar métodos de identificación de daño que sean lo más eficientes posibles. En este sentido, se pretende analizar las aportaciones que pueden realizar el MSR como método numérico y la TW como técnica de análisis de señales.

Respecto del MSR, teniendo en cuenta que es la primera vez que se propone su utilización en problemas mecánicos en general, y en vibraciones en particular, nuestros objetivos en esta tesis se centran solamente, y como primer paso, en vibraciones en elementos estructurales de 1D, es decir, en barras. Se deja para futuras investigaciones su extensión a estructuras más complejas. Más concretamente, se pretende validar el método para vibraciones longitudinales y transversales, en ambos casos, tanto en condiciones de barra libre (vibraciones naturales) como forzada (vibraciones forzadas), para diversas condiciones de contorno habituales en la práctica. Todo ello para barras no

dañadas y dañadas. De estos modelos numéricos se espera que nos permitan obtener la respuesta vibracional de barras, para su análisis posterior en el proceso de detección del daño.

Respecto de la TW, se debe tener en cuenta que, tal y como se ha comentado en el apartado anterior, existen varios antecedentes de su aplicación en el proceso de detección de daño. Sin embargo, como hemos indicado antes, son pocos los trabajos que abordan la utilización de vibraciones forzadas y el uso de señales temporales medidas en un solo punto de la estructura. Es ahí donde se pretende avanzar en esta tesis. Más concretamente, los objetivos más relevantes en este aspecto son:

-Analizar de qué manera influye el orden del modo propio elegido en el proceso de detección de daño, cuando se usan vibraciones naturales.

-Establecer un mecanismo de identificación de daño hasta Nivel 3 basado en la TW realizada sobre señales de vibración temporales libres o forzadas medidas en un solo punto de la barra, disminuyendo así el número de sensores a utilizar y el número de realizaciones del experimento.

-Evaluar las posibilidades de la TW para la identificación de daño hasta Nivel 3 a partir de vibraciones forzadas, tanto señales espaciales a tiempo fijo como señales temporales en una posición fija.

Todos estos objetivos se pretende conseguirlos solo para vibraciones longitudinales. Se deja para trabajos futuros su extensión al caso de vibraciones transversales.

1.6.- Organización de la Memoria

La tesis está dividida en 8 capítulos, uno de ellos esta introducción, y el último un resumen de las conclusiones más relevantes. Los 6 restantes (Capítulos 2-7), se pueden agrupar en tres bloques:

-Bloque 1 (Capítulos 2, 3 y 4): En los que se exponen y analizan *aspectos teóricos de las técnicas utilizadas*. El Capítulo 2 está dedicado a los fundamentos del MSR. El Capítulo 4 se dedica a la teoría básica de la TW. Por su parte,

en el Capítulo 3 se resumen los aspectos teóricos sobre vibraciones longitudinales y transversales en barras, tanto naturales como forzadas. En ambos casos se deducen las soluciones teóricas que servirán de validación del MSR en los Capítulos 5 y 6, muchas de las cuales son originales de esta tesis. En el caso de vibraciones transversales se consideran los dos modelos físicos más comúnmente usados en la bibliografía, el de Euler-Bernouilli [1.48] y el de Timoshenko [1.49].

-Bloque 2 (Capítulos 5 y 6): En ellos se exponen los resultados de la simulación con el MSR de vibraciones longitudinales (Capítulo 5) y transversales (Capítulo 6) en barras homogéneas (sin daño), para diferentes condiciones de excitación (vibraciones naturales y forzadas, con diferentes tipos de cargas aplicadas). En ambos casos se deducen los modelos en red, que una vez simulados con PSPICE, se validan con las soluciones teóricas aportadas en el Capítulo 3. En el Capítulo 6 se deducen los modelos en red para los modelos de Euler-Bernouilli y Timoshenko en el caso de vibraciones transversales.

-Bloque 3 (Capítulo 7): Se consideran vibraciones longitudinales en barras con daño, modelizado este como disminuciones locales de densidad o rigidez de las barras. En este caso la potencialidad del MSR permite obtener de manera sencilla los modelos en red que simulan las vibraciones de estas barras dañadas. Sobre ellas se propone la aplicación de la TW para identificar el daño hasta Nivel 3. El capítulo se estructura en dos partes, una dedicada a vibraciones naturales y otra a vibraciones forzadas. En ambos casos, la detección de daño se realiza siguiendo dos metodologías completamente diferentes. En primer lugar, se parte de la medición de la señal de vibración en diferentes puntos de la barra a un tiempo fijo, aplicando, por tanto, la TW espacial. En segundo lugar, la identificación se realiza partiendo de la medición de la vibración en un punto determinado, a lo largo del tiempo, aplicando la TW temporal. En todos los casos, se hace un exhaustivo estudio de la capacidad de identificación de daño que tiene la técnica, en función de parámetros tales como el orden del modo de vibración, la intensidad del defecto, el tipo de defecto, el tipo de carga aplicada y su frecuencia en el caso de vibraciones forzadas armónicas, y en algunos casos, del tipo de wavelet y escala usada.

REFERENCIAS

- [1.1] F.K. Chang, J.L. Pérez “Analysis of thick laminated composites”. *Journal of Composite Materials*, 24-8, pp. 801-822 (1990).
- [1.2] D.K. Miller “Lessons learned from the Northridge Earthquake”. *Engineering Structures*, 20, pp. 249-260 (1998).
- [1.3] S.A. Mahin “Lessons from damage to steel buildings during the Northridge Earthquake”. *Engineering Structures*, 20, pp. 261-270 (1998).
- [1.4] A. Rytter “Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures”. PhD Thesis. Aalborg University, Denmark (1993).
- [1.5] F.K. Chang, ed. “Structural Health Monitoring 2000”. 2nd International Workshop on SHM. Published by Tecnomich Publ. Co. Stanford (1999).
- [1.6] C.P. Frietzen, G. Mengelkamp, A. Güemes “A CFRP plate with piezo-electric actuators and sensors as self-diagnosing intelligent structure”. *Proceedings of the ISMA, Leuven, Belgium* (2002).
- [1.7] C.P. Frietzen, K. Bohle, A. Stepping “Damage Detection in Structures with multiple cracks using computational models”. Editor: J.A. Güemes: *Proceedings European COST F3 Conf. On System Identification&Structural Health Monitoring*, Madrid, pp. 191-200 (2000).
- [1.8] P. Anderson “Identification of Civil Engineering Structures Using Vector ARMA Models”. PhD Thesis. Aalborg University, Denmark (1997).
- [1.9] M. Basseville, M. Abdelghami, A. Benveniste “Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring”. *Automatica*, 36, pp. 101-109 (2000).
- [1.10] C.R. Crowe, J.M. Sater “Smart Aircraft Structures”. AGARD CP-600, vol. 1 (1997).

- [1.11] Ewins D.J. “Modal Testing: Theory, Practice and Applications”. Research Studies Press, Baldock, Hertfordshire (2000).
- [1.12] J.A. Güemes et al. “Experimental analysis of buckling skin panels by fiber optic sensors”. *Smart Materials and Structures*, 10, pp. 490-496 (2001).
- [1.13] R. Pascual-Jiménez “Model based structural damage assessment using vibrations measurements”. PhD Thesis. University of Liege, Belgium (1999).
- [1.14] L. Peusner “Studies in Network Thermodynamics”. Elsevier, Amsterdam (1986).
- [1.15] J. Horno “Network Simulation Method”. Research Signpost, Trivandrum (2002).
- [1.16] M.T. García-Hernández, J. Castilla, C.F. González-Fernández, J. Horno “Application of the network method to simulation of a square scheme with Butler-Volmer charge transfer”. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 424, pp. 207-212 (1997).
- [1.17] J. Castilla, M.T. García-Hernández, A. Hayas, J. Horno “Simulation of non-stationary electrodiffusion processes in charged membranes by the network approach”. *Journal of Membrane Science*, 116, pp. 107-116 (1996).
- [1.18] F. Alhama, C.F. González-Fernández “Transient thermal behaviour of phase-change processes in solid foods with variable thermal properties”. *Journal of Food Engineering*, 54, pp. 331-336 (2002).
- [1.19] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego, “Transversal waves in beams via the network simulation method”. *Journal of Sound and Vibration*, 283, pp. 997-1013 (2005).
- [1.20] J. Bockris “Modern electrochemistry”. Vol.1, Plenum Publishing Corporation, pp. 476, New York (1998).
- [1.21] A.J. Bard “Electroanalytical Chemistry”. Vol. 19, Marcel Dekker, pp. 64-68, New York (1999).
- [1.22] Y.S. Meyer “Wavelets: algorithms and applications”. SIAM (1993).

- [1.23] G. Kaiser “A friendly guide de wavelets”. Birkhauser, Boston (1994).
- [1.24] M.P. González Martínez “Identificación de daño sísmico en estructuras de edificios”. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo (2004).
- [1.25] D.E. Newland “Wavelet analysis of vibration”, parts I and II. Journal of Sound and Acoustics, 116, pp. 409-425 (1994).
- [1.26] C. Surace, R. Ruotolo “Crack detection of a beam using the wavelet transform”. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, 1, pp. 1141-1147 (1994).
- [1.27] W.Q. Wang, P.D. McFadden “Application of wavelets to gearbox vibrations signals for fault detection”. Journal of Sound and Vibration, 192, pp. 927-939 (1996).
- [1.28] K.M. Liew, Q. Wang “Application of wavelet theory for crack identification in structures”. Journal Engineering Mechanics, 124 pp. 152-157 (1998).
- [1.29] A.V. Ovanesova, L.E. Suárez “Applications of wavelet transform to damage detection in frame structures”. Engineering Structures, 26, pp. 39-49 (2004).
- [1.30] H. Kim, H. Melhem “Damage detection of structures by wavelet analysis”. Engineering Structures, 26, pp. 347-362 (2004).
- [1.31] C.C. Chuang, L.W. Chen “Damage detection of a rectangular plate by spatial wavelet based approach”. Applied Acoustic (2004). In press.
- [1.32] W.J. Staszewski “Structural and mechanical damage detection using wavelets”. The Shock and Vibration Digest, 30, pp. 457-472 (1998).
- [1.33] X. Deng, W. Wang “Crack detection using spatial measurements and wavelet analysis”. International Journal of Fracture, 91, pp. 23-28 (1998).
- [1.34] E. Douka, S. Loutridis, A. Trochidis “Crack identification in plates using wavelet analysis”. Journal of Sound and Vibration, 270, pp. 279-295 (2004).

- [1.35] W.J. Wang “Wavelet transform in vibration analysis for mechanical fault diagnosis”. *Shock and Vibration*, 3, pp. 17-26 (1996).
- [1.36] S. Loutridis, E. Douka, A. Trochidis “Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis”. *Journal of Sound and Vibration*, 270, pp. 279-295 (2004).
- [1.37] E. Douka, S. Loutridis, A. Trochidis “Crack detection in beams using wavelet analysis”. *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 3557-3569 (2003).
- [1.38] A. Messina “Detecting damage in beams through digital differentiator filter and continuous wavelet transform”. *Journal of Sound and Vibration*, 272, pp. 385-412 (2004).
- [1.39] C.C. Chuang, L.W. Chen “Vibration damage detection of a Timoshenko beam by spatial wavelet based approach”. *Applied Acoustics*, 64, pp. 1217-1240 (2003).
- [1.40] L.H. Yam, Y.I. Yan, J.S. Jiang “Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network identification”. *Composite Structures*, 60, pp. 403-412 (2003).
- [1.41] J. Tian, Z. Li, X. Su “Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves”. *Journal of Sound and Vibration*, 261, pp. 715-727 (2003).
- [1.42] J.C. Hong, Y.Y. Kim, H.C. Lee, Y.W. Lee “Damage detection using the Lipschitz exponent estimated by the wavelet transform: applications to vibration modes of a beam”. *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 1803-1816 (2002).
- [1.43] C.J. Lu, Y.T. Hsu “Vibration analysis of an inhomogeneous string for damage detection by wavelet transform”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp. 745-754 (2002).

- [1.44] S.T. Quek, Q. Wang, L. Zhang, K.H. Ong “Practical issues in the detection of damage in beams using wavelets”. *Smart Materials and Structures*, 10, pp. 1009-1017 (2001).
- [1.45] Y.Y. Lee, K.M. Liew “Detection of damage locations in a beam using the wavelet analysis”. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1, pp. 455-465 (2001).
- [1.46] S.T. Quek, Q. Wang, L. Zhang, K.K. Ang “Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, pp. 2899-2910 (2001).
- [1.47] Q. Wang, X. Deng “Damage detection with spatial wavelets”. *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp. 3443-3468 (1999).
- [1.48] H. Qiao, Q.S. Li, G.Q. Li “Vibratory characteristics of flexural non-uniform Euler-Bernoulli beams carrying an arbitrary number of spring-mass systems” *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp. 725-743 (2002).
- [1.49] D.Y. Zheng, S.C. Fan “Natural frequency changes of a cracked Timoshenko beam by modified Fourier series”. *Journal of Sound and Vibration*, 246, pp. 297-317 (2001).

CAPÍTULO 2

EL MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES

2.1.- Introducción

Por Método de Simulación por Redes (MSR) designamos un procedimiento físico-matemático de simulación y estudio de sistemas dinámicos, basado en la elaboración de un modelo en red eléctrica equivalente al proceso físico en estudio, y su posterior simulación mediante la implementación de tal modelo en red con un programa de resolución de circuitos eléctricos adecuado. Este método es el resultado de la combinación de numerosas contribuciones investigadoras, que han aunado la Termodinámica de Redes con la simulación por ordenador, y del avance realizado en las dos últimas décadas en materia de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de circuitos eléctricos y electrónicos complejos mediante métodos numéricos, dando lugar ésto último a una gran profusión de programas informáticos destinados a este fin.

Podríamos decir que son dos los pilares en los que se sustenta la técnica utilizada en esta tesis: por una parte, la llamada Termodinámica de Redes [2.1, 2.2, 2.3] y, por otra, la aparición de programas de simulación de circuitos, tal como PSPICE.

Fruto de posteriores investigaciones, que tuvieron el acierto de combinar los resultados obtenidos en las investigaciones cuyos resultados arriba indicábamos, es el actualmente llamado Método de Simulación por Redes, nombre que, aunque de reciente acuñamiento, ha tenido ya brillantes y numerosas aplicaciones en otros procesos físicos desde la década de los 80, entre los que destacamos los estudios de fenómenos de transporte en membranas [2.4, 2.5], de procesos de electrodo [2.6, 2.7], de fenómenos electrocinéticos en partículas coloidales [2.8, 2.9, 2.10, 2.11] y de procesos de transferencia de calor [2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16].

En los apartados siguientes nos dedicaremos a explicitar las bases del MSR y su forma de utilización. Pero antes, creemos necesario detenernos en dos puntualizaciones que a lo largo de los años en que se ha venido usando esta técnica, han dado lugar a confusiones.

En primer lugar, el MSR es conceptualmente distinto de las llamadas analogías mecano-eléctricas presentes en esta rama de la física, y de las que podemos encontrar numerosas muestras en cualquier texto de mecánica clásica [2.17, 2.18], ya que este tipo de analogías tienen como origen la semejanza de las ecuaciones que describen los procesos, como medio la elaboración del circuito y como fin, la implementación física de un circuito eléctrico equivalente, todo ello como procedimiento de obtención de resultados numéricos de los sistemas mecánicos. Obviamente, en casos muy simples esta implementación puede ser útil, fundamentalmente con fines pedagógicos, pero en la mayoría de los casos reales se hace prácticamente imposible, tanto por el costo de los elementos de circuito a implementar, como por la dificultad logística que representa la construcción de los circuitos representativos.

Otro de los puntos que pueden llevar a confusión es el referido al MSR visto como método numérico. Son muy conocidos, y ampliamente aplicados en el campo de las vibraciones, métodos numéricos basados en diferencias finitas [2.19], elementos finitos [2.20, 2.21], o líneas de transmisión [2.22], por enumerar aquellos con los que pudiera llevar a confusión en sus planteamientos o forma de trabajar con el MSR.

En cuanto a los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos, la diferencia fundamental con el MSR radica en la doble reticulación, espacial y temporal, que llevan a cabo, al contrario que el MSR, cuya reticulación previa a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales es solo espacial.

El método de líneas de transmisión (TLM), si bien coincide con el MSR en la sola discretización espacial y tratamiento continuo de la variable temporal, se diferencia en el tratamiento de las variables a considerar para resolver el problema, lo que lleva no solo a diferencias formales, sino también a diferencias en la interpretación de resultados.

Antes de pasar a describir la metodología de uso del MSR, será conveniente introducir los fundamentos de la Termodinámica de Redes y el “modus operandi” del programa de simulación de circuitos usado en este trabajo (PSPICE), que como comentábamos con anterioridad, pueden considerarse como bases sobre las que se apoya el MSR.

2.1.1.- Termodinámica de redes

La termodinámica de redes es una metodología alternativa que, para el estudio de un proceso dado, centra su atención en el modelo en grafo del sistema, en lugar de en el modelo matemático, de forma que a partir de dicho grafo, no solo podríamos obtener el modelo matemático, sino que, además, tiene la capacidad de suministrar mayor información, ya que incorpora la topología del sistema, haciendo evidente la naturaleza de los subsistemas y el modo en que interaccionan entre sí.

Surgida en la década de los 70, a partir de los trabajos de Oster, Perelson y Katchalsky [2.23] por un lado, y Peusner [2.2], por otro, tenía como finalidades, por una parte, dotar a la termodinámica de una estructura matemática similar a la teoría de sistemas dinámicos y, por otra, posibilitar el estudio de sistemas dinámicos altamente organizados mediante la termodinámica de los procesos irreversibles.

En la termodinámica de redes los efectos disipativos, de almacenamiento y de conversión energética en un sistema se incorporan a la geometría del grafo, que, junto con su topología, que incluye las leyes de conservación y continuidad que se denominan ahora leyes de flujo y fuerza de Kirchhoff, definen el sistema completamente. El

lenguaje de la termodinámica de redes permite elaborar modelos de sistemas que satisfacen las leyes termodinámicas, que tienen en cuenta los procesos e interacciones que se suponen básicos en el fenómeno real y que, en definitiva, proporcionan su estructura dinámica esencial.

Como método alternativo, podríamos decir que una de sus mayores ventajas sobre otros métodos de análisis de sistemas, es proporcionar una representación gráfica de los procesos que acontecen en el sistema, además de obvias ventajas intuitivas, ya que revela el papel de la topología del sistema en su comportamiento dinámico, hasta el punto de que características de sistemas dinámicos consideradas previamente como restricciones energéticas, pueden ser clasificadas más propiamente como “ligaduras topológicas” y, como tales, consecuencia de la estructura del sistema [2.24].

2.1.2.- Simulación

La segunda de las bases en que se sustenta el MSR son los programas de simulación de circuitos, y más concretamente el programa PSPICE, que será el usado en esta Memoria. Dedicaremos, a continuación, unos breves comentarios a él.

El programa PSPICE [2.25] es uno de los programas de la familia de procedimientos dirigidos a la simulación de circuitos denominada SPICE2 [2.26]. La estructura operativa del programa es análoga a la de cualquier otro programa de simulación de circuitos, de la que damos cuenta a continuación de forma esquemática.

Para nuestros intereses, la parte más importante del programa es la referida al análisis, pues determina la solución numérica del circuito. Para llevar a cabo la transición desde el circuito físico hasta el sistema de ecuaciones, cada elemento en el circuito se representa por un modelo matemático. Las ecuaciones que describen el circuito completo deben satisfacer, en consecuencia, las restricciones que implican las relaciones de rama, es decir, las ecuaciones del modelo matemático de cada elemento, así como las ligaduras topológicas que implican satisfacer las leyes de Kirchhoff en cada instante. Analizar el circuito es, en definitiva, obtener la solución de las ecuaciones del circuito que son, en general, sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales. Pero en un circuito dado, se pueden hacer distintas clases de análisis, y de nuestro interés aquí solo será el análisis transitorio y en continua para circuitos lineales.

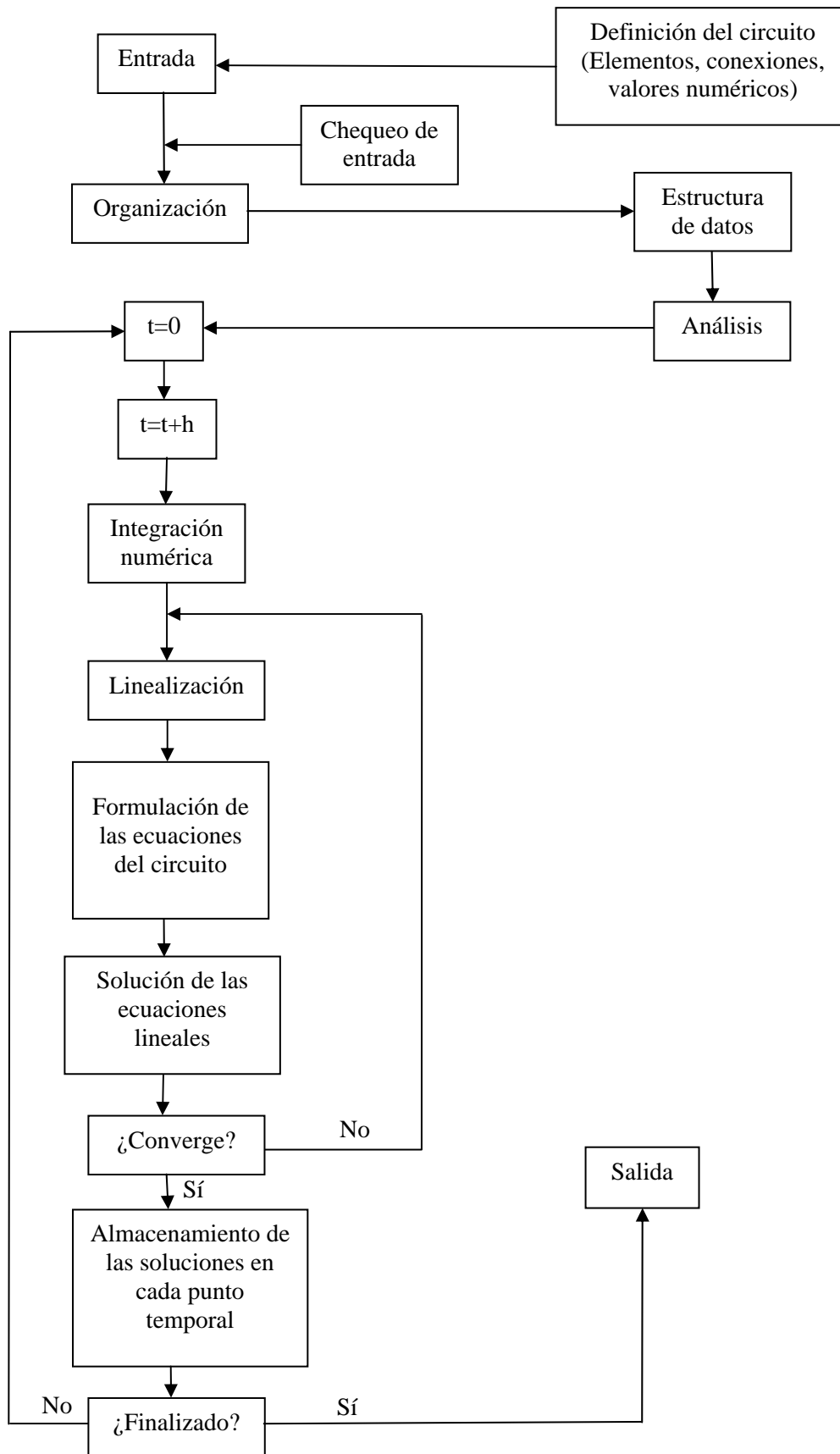


Figura 2.1. Diagrama de actuación de Pspice.

El análisis en continua de PSPICE determina el punto de trabajo del circuito en continua, con las bobinas cortocircuitadas y los condensadores en circuito abierto. Antes de hacer el análisis transitorio, se realiza automáticamente un análisis en continua para determinar las condiciones iniciales del transitorio. El análisis transitorio determina la respuesta temporal del circuito en un intervalo de tiempo especificado $[0, T]$. La solución transitoria se determina computacionalmente dividiendo el intervalo temporal en un conjunto discreto de puntos temporales $(0, t_1, t_2, \dots, T)$. En cada punto se utiliza un algoritmo de integración numérica para transformar las ecuaciones diferenciales del modelo de cada elemento de circuito capaz de almacenar energía en ecuaciones algebraicas equivalentes, que podrán ser lineales o no. En caso de ser no lineales, se linealizan mediante el método de Newton-Raphson, que aproxima cada no linealidad en el circuito por una serie de Taylor truncada después del término de primer orden. Con ello, en cada interacción se obtiene la solución de un circuito lineal, para lo cual se precisa, además de los procesos de integración y linealización ya mencionados, formular las ecuaciones del circuito linealizado y obtener la solución de tal sistema de ecuaciones. Una vez que se alcanza la convergencia, la solución correspondiente a cada punto temporal se almacena y se repite el proceso para el siguiente tiempo, hasta llegar al final del intervalo temporal (Figura 2.1). Para un análisis en continua, el lazo externo de la figura no se utiliza y, además, si el circuito contiene únicamente elementos lineales, el lazo interno de iteración se elimina ya que la solución se obtiene en una iteración.

Los algoritmos utilizados en PSPICE, que se documentan en la tesis de Nagel [2.26], son el resultado de implementaciones cuidadosas, modificaciones y comparaciones de los métodos numéricos existentes en el contexto especial de la simulación de circuitos. El objeto de estos análisis es, lógicamente, la elección de los mejores métodos en un programa de simulación de circuitos electrónicos que pretende ser exacto y eficaz, con una interacción mínima por parte del usuario.

En concreto, en PSPICE la formulación de las ecuaciones del circuito se realiza utilizando el método conocido como Análisis Nodal Modificado, que proporciona la misma generalidad que otros métodos de formulación y origina un sistema de ecuaciones casi simétrico que se resuelve con un esfuerzo computacional (número de

instrucciones en lenguaje máquina, en definitiva) comparable a los métodos nodales más simples.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el programa PSPICE utiliza el método directo de eliminación conocido como de factorización LU. Y para minimizar el número de elementos de matriz nulos que se convierten en no nulos en las distintas operaciones usa el método de Markowitz, equivalente a otros métodos más sofisticados pero que requiere menor cantidad de tiempo CPU para reordenar las ecuaciones.

Si un circuito tiene elementos no lineales, tanto su análisis transitorio como en continua requieren un método de resolución de ecuaciones algebraicas no lineales, que determinará la solución del sistema mediante una secuencia iterativa de soluciones de ecuaciones linealizadas. En la mayor parte de los programas de simulación de circuitos el método usado es el de Newton-Raphson. Sin embargo, este algoritmo no puede ser aplicado directamente a problemas de simulación de circuitos a menos que se realicen modificaciones, debido a la naturaleza exponencial de las ecuaciones que modelan ciertos dispositivos electrónicos, que pueden dar lugar a “overflow” numéricos. De las diversas modificaciones de este método analizadas por Nagel, es el método Colon el más fácil de implementar y el que requiere el menor número de iteraciones para converger, por lo que es el implementado en PSPICE, junto con un nuevo criterio de convergencia, basado en el grado de aproximación de las relaciones de rama linealizadas respecto de las relaciones de rama originales no lineales, criterio que es independiente de qué variables del circuito sean elegidas como incógnitas en el algoritmo de formulación de las ecuaciones.

Finalmente, el análisis transitorio requiere un algoritmo de integración y un método de variación dinámica del paso del tiempo de integración para mantener una razonable exactitud en la solución. La elección de los métodos de integración implementados en el programa PSPICE está basada en el análisis del error de truncación local y en la estabilidad. Estas propiedades son en general antagónicas, por lo que se requiere una solución de compromiso que, en los métodos polinomiales, se concreta en el orden del método. Además, debido a que ciertos circuitos pueden dar lugar a un sistema de ecuaciones “stiff” (es el caso de circuitos que poseen constantes de tiempo grandes y pequeñas) es conveniente que el algoritmo de integración sea “stiff-estable” (lo será cuando sea estable al tender a infinito el paso de tiempo). La disyuntiva se

resuelve con la incorporación al programa PSPICE de los métodos de integración trapezoidal y Gear de orden variable, de dos a seis. Además, este programa incorpora un algoritmo de variación y control del paso de tiempo de integración de modo que sea aceptable el error de truncación local.

2.2.- Metodología

La elaboración del modelo en red equivalente a un proceso dado requiere la introducción de algunos conceptos y simbolismos de uso frecuente, así como la estructura operacional necesaria para el análisis del problema. A estos aspectos le dedicaremos las siguientes líneas.

Dado un sistema, a cada modo de interacción de éste con el medio se le designa como una puerta energética, de modo que puede hablarse de una puerta térmica, mecánica, eléctrica, etc. Si el sistema y el medio interactúan mediante una determinada puerta energética, su interacción implica una transferencia de energía o potencia, la cual viene expresada por el producto de dos variables, denominadas usualmente flujo, J , y fuerza, X , magnitudes medibles que se consideran variables dinámicas básicas. Las fuerzas pueden considerarse relacionadas con la diferencia de otras magnitudes, que suelen llamarse potenciales, Φ , por analogía con el potencial eléctrico. Tal modo de interacción puede representarse, en el caso más simple, por una monopuerta, es decir un elemento de dos terminales al que se le asocian las variables flujo y fuerza, tal que el flujo es el mismo en cada terminal, y la fuerza es la diferencia de potencial entre sus extremos. Las monopuertas pueden considerarse versiones matemáticas idealizadas de componentes reales de un sistema o de los subsistemas en que éste pueda dividirse, o bien utilizarse para representar determinados efectos físicos.

Al analizar un sistema dinámico mediante la Termodinámica de Redes se subdivide mentalmente en subsistemas homogéneos y cada uno de ellos, a su vez, es separado conceptualmente en partes, en base a los procesos reversibles o irreversibles que puedan coexistir. Los subsistemas reversibles se supone que almacenan energía sin pérdida, mientras que los irreversibles disipan energía sin almacenarla. Cada uno de estos subsistemas se identifica con una puerta energética. Esto da lugar, en los casos más sencillos, a disponer de una serie de monopuertas que será preciso conectar para

disponer de un modelo gráfico del sistema, es decir, un conjunto de líneas o ramas, un conjunto de vértices o nudos, y una ley de asociación de las ramas a los distintos pares de nudos, es decir, un grafo. En cada monopuerta se asocia, bien arbitraria o físicamente, un sentido al flujo, representándolo mediante una flecha, resultando así una red, es decir, un grafo dirigido en el que las ramas están asociadas. Pero para que tal red represente un cierto sistema dinámico, en la Termodinámica de Redes se imponen las ligaduras topológicas de que las variables dinámicas obedezcan las leyes de Kirchhoff, que no son más que otra forma de expresar las condiciones de conservación y continuidad. Así, a las variables de flujo se les exige el requerimiento de su conservación a través de los límites de los subsistemas, es decir, que obedezcan la ley de corrientes de Kirchhoff, por lo que se denominan variables LCK. Las variables fuerza vendrán definidas con la condición de que sean funciones únicas y continuas de la posición a través de los límites, esto es, que satisfagan la ley de voltajes de Kirchhoff, por lo que reciben el nombre de variables LVK. De este modo, se asocian a los elementos del grafo o de la red dos estructuras algebraicas independientes: un conjunto de flujos que obedecen a una ley de conservación local (LCK) y un conjunto de fuerzas que satisfacen una condición de unicidad (LVK).

En consecuencia, cada monopuerta tiene asociadas dos variables, una de ellas, variable LVK. Desde un punto de vista más abstracto, una monopuerta puede definirse como una función que asigna a una variable LCK, una variable LVK, llamándose ecuación constitutiva a la relación que dicha función establece entre dicho par de variables. En este sentido, lo esencial en cuanto a las variables que caracterizan una monopuerta es ser variables LCK y LVK, y no que su producto tenga necesariamente dimensiones de potencia. Por tanto, las propiedades puramente topológicas de una red están relacionadas con las leyes de Kirchhoff, mientras que las propiedades geométricas están conectadas con las relaciones constitutivas.

Las propiedades topológicas dependen únicamente de la asignación de las conexiones entre los diferentes puntos, o de las posibles combinaciones de trayectorias que unen un nudo dado con otros. Son independientes de las medidas y, desde un punto de vista topológico, dos grafos serán iguales o isomorfos si las asociaciones de vértices y ramas son las mismas. Las propiedades asociadas a las medidas son las geométricas. Dos grafos son iguales geoméricamente si los potenciales y flujos de cada punto y rama

correspondiente son iguales para cualquier conjunto de valores que puedan ser elegidos para los flujos o las fuerzas, lo que requiere que deban ser especificadas las relaciones constitutivas. Las propiedades topológicas de un sistema o proceso físico están relacionadas con la estructura lógica de la teoría, mientras que las propiedades geométricas estarán relacionadas con la fenomenología. Las propiedades geométricas de la red, es decir, sus características métricas, se siguen de las relaciones constitutivas. Las propiedades topológicas de una red representativa de un proceso o sistema físico se obtienen de las leyes de Kirchhoff. De hecho, dichas leyes constituyen una serie de restricciones lineales en los valores instantáneos que pueden tomar los flujos y las fuerzas y, dado que estas limitaciones dependen únicamente del modo en que se conecten los elementos de la red, las leyes de Kirchhoff pueden considerarse como ligaduras topológicas.

Dichas ligaduras, además de implicar la conservación y continuidad de flujos y fuerzas, respectivamente, dan lugar al denominado teorema de Tellegen, aplicable a cualquier tipo de red, lineal o no lineal, pasiva o activa, que establece que la suma extendida a todas las ramas de una red del producto de fuerzas y flujos en cada una de ellas es cero:

$$\sum X_i J_i = 0 \quad (2.1)$$

Este teorema admite una inmediata interpretación en conexión con la conservación de la energía o la potencia, lo que evidentemente no es un resultado físico nuevo, pero sí importante, ya que no se necesita hacer uso de las relaciones constitutivas, sino que se asienta exclusivamente en las leyes de Kirchhoff para flujos y fuerzas, que son propiedades topológicas [2.1].

Para describir el comportamiento dinámico de un sistema, además de las variables flujo y fuerza, es a veces necesario disponer de las variables denominadas momento, p , y desplazamiento, q , definidas mediante las expresiones diferenciales:

$$dp(t) = X(t)dt \quad (2.2)$$

$$dq(t) = J(t)dt \quad (2.3)$$

Si la potencia, $P(t)$, viene definida por el producto de las variables flujo y fuerza, la energía será:

$$E(t) = \int P(t)dt = \int X(t)J(t)dt \quad (2.4)$$

o bien, introduciendo las variables p o q :

$$E(t) = \int X(t)dq(t) = \int J(t)dp(t) \quad (2.5)$$

El momento, p , y el desplazamiento, q , son variables LVK y LCK, respectivamente, si así lo son X y J . Estas cuatro variables son los únicos tipos que se necesitan para modelar un sistema físico dinámico. Sin embargo, la energía no puede evaluarse mediante las expresiones (2.4) y (2.5), a menos que se conozcan las relaciones entre las variables del integrando. Es decir, antes de que las variables J , X , q , p , se puedan utilizar para describir el comportamiento de un sistema real, se deben introducir las propiedades físicas del sistema, mediante las llamadas relaciones constitutivas.

2.2.1.- Monopuertas básicas

Las monopuertas pueden clasificarse en dos grupos bien diferenciados. El primero es el de monopuertas pasivas, que representan algún tipo de disipación o almacenamiento. El segundo es el de monopuertas activas o fuentes. Tanto la definición como la representación de estas funciones proviene de la Teoría de Circuitos, por lo que a la hora de construir la red ésta tendrá el aspecto de un circuito eléctrico, lo que hace que sea natural su resolución mediante un programa de simulación de circuitos eléctricos.

2.2.1.1.- Monopuertas pasivas

a.- Monopuerta resistiva

La monopuerta resistiva o resistencia es un elemento de la red asociado a una relación entre las variables temporales de las variables fuerza (diferencia entre dos potenciales contiguos) y flujo de una misma rama. Esta relación se establece mediante una función independiente del tiempo, llamada resistencia R , que puede depender o no

del flujo o de la fuerza. En el caso más simple, esta relación consiste en que la fuerza es proporcional al flujo, siendo R la constante de proporcionalidad:

$$\frac{X}{J} = R \quad (2.6)$$

Una monopuerta resistiva representa efectos disipativos en el sistema. No tiene “memoria”, lo que significa que no almacena o integra nada en el tiempo, así que su acción es instantánea. El símbolo por el que representaremos esta monopuerta es el de la Figura 2.2.



Figura 2.2. Representación de una monopuerta resistiva.

b.- Monopuerta capacitiva

La monopuerta capacitiva o condensador es un elemento de la red asociado a una relación entre la variable flujo y la derivada temporal de la variable fuerza de una misma rama, que se establece mediante una función independiente del tiempo llamada capacidad C :

$$J = C \frac{dX}{dt} \quad (2.7)$$

Este elemento está asociado a algún tipo de almacenamiento y funciona sin originar ningún tipo de disipación energética. Su representación simbólica viene dada en la Figura 2.3.



Figura 2.3. Representación de una monopuerta capacitiva.

c.- Monopuerta inductiva

La monopuerta inductiva o bobina es un elemento de la red asociado a una relación entre la fuerza y la derivada temporal del flujo de una misma rama, establecida a través de una función no dependiente del tiempo llamada inductancia L :

$$X = L \frac{dJ}{dt} \quad (2.8)$$

La monopuerta inductiva también puede estar relacionada con algún tipo de almacenamiento de inercia, sin que origine disipación energética. Se representa mediante el símbolo de la Figura 2.4.



Figura 2.4. Representación de una monopuerta inductiva.

2.2.1.2- Monopuertas activas

a.- Fuente independiente de fuerza

Una fuente independiente de fuerza es un elemento de la red que establece o fija la diferencia de potencial (fuerza) entre dos puntos consecutivos de la red. Esta fuerza puede ser fija o variar con el tiempo, pero es algo establecido de forma externa que no depende de ninguna otra variable de la red. El símbolo de esta monopuerta se muestra en la Figura 2.5.

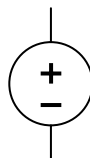


Figura 2.5. Representación de una fuente independiente de fuerza.

b.- Fuente dependiente de fuerza

Una fuente dependiente de fuerza es un elemento de la red que establece la fuerza entre dos puntos consecutivos de la red, pero, a diferencia de lo que ocurre en la fuente independiente de fuerza, depende del potencial de uno o varios puntos de la red o del flujo a través de una rama, dependencia que puede ser lineal o no. La representación simbólica de esta monopuerta se muestra en la Figura 2.6.



Figura 2.6. Representación de una fuente dependiente de fuerza.

c.- Fuente independiente de flujo

Una fuente independiente de flujo es un elemento de la red que fija el flujo de una rama mediante una función que puede ser constante o depender del tiempo, pero que no depende de ninguna otra variable de la red. Se representa mediante el símbolo de la Figura 2.7.

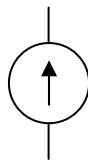


Figura 2.7. Representación de una fuente independiente de flujo.

d.- Fuente dependiente de flujo

Una fuente dependiente de flujo es un elemento de la red que fija el flujo de una rama, pero, al igual que ocurre con la fuente dependiente de fuerza, este flujo depende del potencial de uno o varios puntos de la red o del flujo de una rama, pudiendo ser esta dependencia lineal o no. La representación de esta monopuerta se muestra en la Figura 2.8.



Figura 2.8. Representación de una fuente dependiente de flujo.

2.2.2.- Programación y simulación

Las distintas monpuertas nos permiten la confección y elaboración del modelo en red que represente al proceso físico bajo estudio. Una vez establecido dicho modelo en red, debemos escribir el programa correspondiente para que el programa PSPICE pueda realizar su análisis y obtener a la salida los datos numéricos y/o gráficos sobre tal circuito y, por tanto, del sistema dinámico problema, con lo que daríamos por finalizado el proceso del MSR (véase la Figura 2.9).

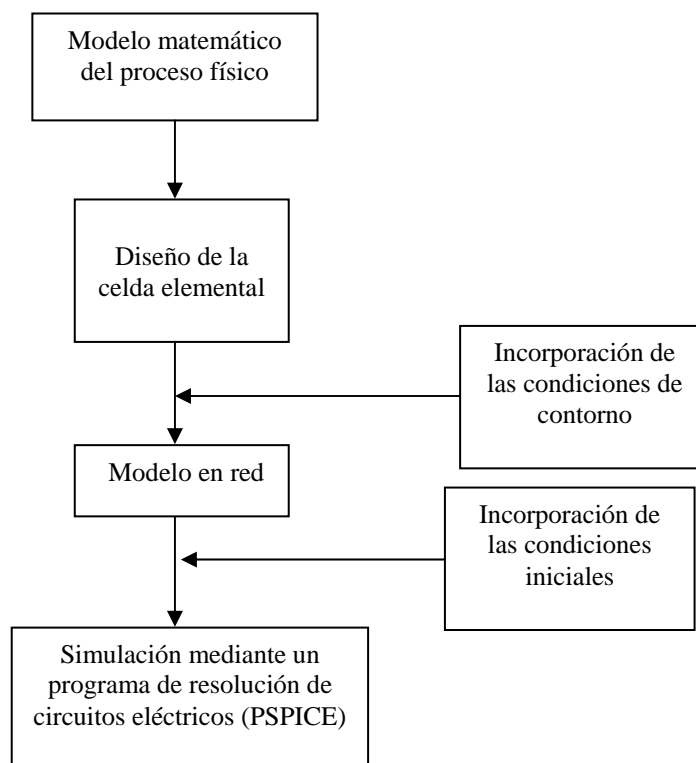


Figura 2.9. Esquema de la aplicación del MSR a un proceso físico.

REFERENCIAS

- [2.1] L. Peusner “Studies in network thermodynamics”. Elsevier, Amsterdam (1986).
- [2.2] L. Peusner “The principles of network thermodynamics: Theory and biophysical applications”. Entropy, Lincoln, Massachusetts (1987).
- [2.3] D.C. Mikulecky “Network thermodynamics and complexity: a transition to relational systems theory”. Computers and Chemistry, 25, pp. 369-391 (2001).
- [2.4] A. Moya “Estudio de procesos de transporte iónico en células electroquímicas mediante el Método de Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1996).
- [2.5] J. Castilla, M.T. García-Hernández, A. Hayas, J. Horno “Simulation of non-stationary electrodiffusion processes in charged membranes by the network approach”. Journal of Membrane Science, 116, pp. 107-116 (1996).
- [2.6] M.T. García Hernández “Simulación digital de procesos de electrodo. Método de redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1994).
- [2.7] M.T. García-Hernández, J. Castilla, C.F. González-Fernández, J. Horno “Application of the network method to simulation of a square scheme with Butler-Volmer charge transfer”. Journal of Electroanalytical Chemistry, 424, pp. 207-212 (1997).
- [2.8] J.J. López-García, A. A. Moya, J. Horno, A. Delgado, F. González-Caballero “A network model of the electrical double layer around a colloid particle”. Journal of Colloid and Interface Science, 183, pp. 124-130 (1996).
- [2.9] A.J. Poza, J.J. López-García, A. Hayas, J. Horno, “A network simulation method for numerical solution of the nonlinear Poisson-Boltzmann equation for a spheroidal surface”. Journal of Colloid and Interface Science, 219, pp 241-249 (1999).
- [2.10] A.J. Poza “Estudio del efecto de la excentricidad de las partículas cargadas sobre las propiedades eléctricas de suspensiones coloidales mediante el método de simulación por redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (2000).

- [2.11] V. Zimmerman, C. Grosse “Numerical calculation of the dielectric spectra of cell-type particles”. *Journal of Physical Chemistry B*, 108, pp. 12617-12622 (2004).
- [2.12] C.F. González-Fernández, F. Alhama, J.F. López-Sanchez, J. Horno “Application of the network method to heat conduction processes with polynomial and potential-exponentially varying thermal properties”. *Numerical Heat Transfer A, Applications*, 33, pp. 549-559 (1998).
- [2.13] M. Alarcón “Transporte de calor en sistemas con aletas. Coeficientes de rendimiento y red de transferencia”. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena (2001).
- [2.14] F. Alhama “Estudio de respuestas térmicas transitorias en procesos no lineales de conducción de calor mediante el Método de Simulación por Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia (1999).
- [2.15] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Determination of the specific heat versus temperature under natural convection boundary condition using the network simulation method”. *Eurotherm Seminar N° 68* (2001).
- [2.16] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Analysis of laminar forced convection with Network Simulation Method in thermal entrance region of ducts”. *International Journal of Thermal Sciences*, 43, pp. 443-451 (2004).
- [2.17] C. Harris, C. Crede “Shock and vibration handbook”. McGrawhill, New York (1961).
- [2.18] J.B. Marion “Dinámica clásica de las partículas y sistemas”. Reverté, Barcelona (1995).
- [2.19] G. Cohen “Higher-order numerical methods for transient wave equations”. Springer, Berlín (2002).
- [2.20] J.K. Sinha, M.I. Friswell. “Simulation of the Dynamic Response of a cracked beam”. *Computers and Structures*, 80, pp. 1473-1476 (2002).

- [2.21] W. J. Mansur, D. Soares, M.C.A. Ferra “Initial conditions in frequency domain analysis: the FEM applied to the scalar wave equation”. *Journal of Sound and Vibration*, 270, pp. 767-780 (2004).
- [2.22] J.A. Porti, J.A. Morente “A three-dimensional symmetrical condensed TLM node for acoustics”. *Journal of Sound and Vibration*, 241, pp. 207-222 (2001).
- [2.23] G. Oster, A. Perelson, A. Katchalsky “Network thermodynamics”. *Nature*, 23 (5329), pp. 393-399 (1971).
- [2.24] C.F. González-Fernández, J. Horno “Modelos en Red de Sistemas Dinámicos”. Gr-802-1989, Granada, 1989.
- [2.25] Microsim PSPICE Versión 8.0 (1997).
- [2.26] L.W. Nagel “SPICE2: a computer program to simulate semiconductor circuits” PH.D. Thesis. University of California, Berkeley (1975).

CAPÍTULO 3

VIBRACIONES EN BARRAS

3.1.- Introducción

Este capítulo tiene por objeto sintetizar los aspectos teóricos de las vibraciones longitudinales y transversales de una barra, fenómeno físico que se conoce y estudia desde hace mucho tiempo. Así, el estudio de las vibraciones longitudinales comienza con la formulación de Robert Hooke, en 1678, de la ley de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación para sólidos elásticos, que permitió obtener teóricamente la ecuación de ondas longitudinales en una barra. El estudio de las vibraciones transversales comienza en 1744 con el desarrollo por Leonard Euler y Daniel Bernoulli del primer modelo para estas vibraciones, obteniendo la ecuación del movimiento que las rige y los modos normales para varias condiciones de contorno [3.1]. Desde entonces, se han elaborado varias técnicas para la obtención de soluciones teóricas, aunque todas recurren, inevitablemente, a la separación de las variables de la ecuación

(lo que es posible tanto para las vibraciones longitudinales como para las transversales), proporcionando una solución temporal y otra espacial que se han de combinar para obtener la solución general.

Estrictamente hablando, las vibraciones longitudinales y transversales en una barra no se presentan independientemente. Sin embargo, en numerosas ocasiones un tipo de vibración predomina sobre el otro, de forma que los efectos de este último son despreciables y podemos considerar únicamente vibraciones longitudinales o transversales.

La forma más precisa de estudiar las vibraciones en una barra es mediante las ecuaciones de elasticidad, un sistema de tres ecuaciones acopladas en derivadas parciales que muestran las relaciones entre la deformación y el esfuerzo en los tres ejes espaciales. Sin embargo, estas ecuaciones son bastante complejas, lo que hace que en la mayoría de ocasiones, y en este trabajo en particular, se parta de la consideración del movimiento de un elemento de la estructura y de ciertas hipótesis sobre la naturaleza y el comportamiento del material, como la ya mencionada consideración de vibraciones longitudinales o transversales por separado. Este tipo de consideraciones se engloba en lo que se suele denominar “Resistencia de Materiales”.

En este capítulo se muestran los diferentes modelos físico-matemáticos con los que trabajaremos posteriormente para simular vibraciones longitudinales y transversales en barras. No se ha hecho una recopilación exhaustiva de los distintos casos que se pueden presentar, sino que el estudio se ha centrado en aquellos que se utilizarán para la validación del MSR en los Capítulos 5 y 6.

3.2.- Vibraciones longitudinales

3.2.1.- Introducción

Como hemos dicho, estudiaremos las vibraciones longitudinales y transversales por separado. Por su mayor sencillez, empezaremos por las longitudinales, que en principio son más conocidas (dada su similitud con otros fenómenos físicos, como las vibraciones transversales de una cuerda). Deduciremos su ecuación del movimiento

estudiando un elemento de la barra y las fuerzas que actúan sobre él, lo que nos proporcionará una visión detallada y comprensible de los procesos que tienen lugar en la barra para que se produzca el movimiento. También es posible deducir esta ecuación del movimiento a partir de las ecuaciones de elasticidad, haciendo una serie de hipótesis que en el fondo son las mismas que haremos aquí. Sin embargo, esta deducción es más “matemática” que “física”, por lo que, aunque es correcta, no nos proporciona una visión tan detallada del proceso.

Más adelante presentaremos la forma de obtener las soluciones analíticas a la ecuación de ondas, las condiciones que deben cumplirse para poder obtener las soluciones, así como algunos casos particulares.

3.2.2.- Dedución de la ecuación del movimiento

Aunque la deducción de la ecuación de ondas longitudinales puede encontrarse en numerosos libros sobre acústica o vibraciones, hemos preferido incluirla en este trabajo para proporcionar un mejor entendimiento del proceso y de las conclusiones a las que llegaremos posteriormente cuando simulemos distintas situaciones.

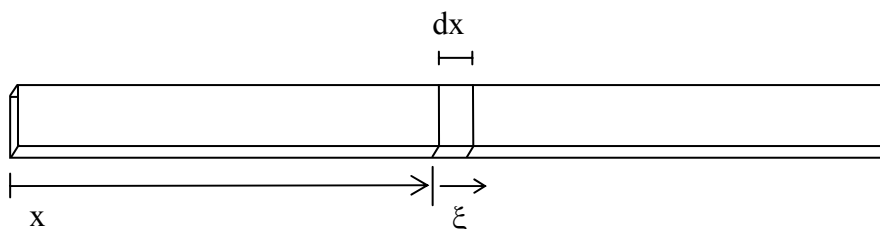


Figura 3.1. Barra en la que la sección transversal en la posición x sufre un desplazamiento ξ .

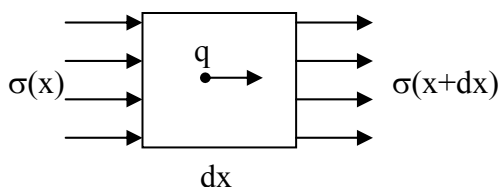


Figura 3.2. Elemento diferencial de la barra sometido a un campo de esfuerzos $\sigma(x,t)$ y a una fuerza interna $q(x,t)$.

Consideremos una barra prismática de longitud L , sección S y densidad ρ , como la mostrada en la Figura 3.1. La coordenada x se refiere a una sección transversal de la barra, mientras que el desplazamiento longitudinal de esta barra viene dado por ξ . Si suponemos que en la barra hay un campo de esfuerzos o presiones que varía con el tiempo, $\sigma(x,t)$, y asumimos que hay una fuerza interna por unidad de volumen $q(x,t)$, las secciones adyacentes de la barra estarán sometidas a esfuerzos dinámicos distintos, lo que dará lugar a que los distintos elementos de la barra no estén en equilibrio y se produzca un desplazamiento y una deformación longitudinal de los mismos.

Teniendo en cuenta la segunda Ley de Newton, las distintas fuerzas que actúan sobre el elemento de la barra de la Figura 3.2 y el convenio de que las fuerzas de tensión son positivas, su ecuación del movimiento es:

$$\sigma(x + dx, t)S - \sigma(x, t)S + q(x, t)Sdx = \rho Sdx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Si tenemos en cuenta que la sección S es constante y que podemos aproximar $\sigma(x+dx,t)$ hasta primer orden como:

$$\sigma(x + dx, t) \approx \sigma(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \quad (3.2)$$

podemos escribir la ecuación (3.1) como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es general, ya que no hemos hecho ninguna suposición sobre el material de la barra, solo sobre su geometría, por lo que es válida independientemente del material del que esté fabricada y de sus características. El siguiente paso es considerar que el material es elástico, por lo que cumple la Ley de Hooke, es decir, el esfuerzo en la barra es proporcional a la deformación que se produce en ella:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.4)$$

E es el parámetro de proporcionalidad, denominado módulo de Young o rigidez, característico de cada material, y ε es la deformación de cada elemento de la barra, definida como $\varepsilon \equiv \partial \xi / \partial x$. Introduciendo este resultado en la ecuación del movimiento (3.3), tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + q = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Si la barra es homogénea, E y ρ son constantes a lo largo de ella, por lo que podemos escribir:

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

En ausencia de fuerzas internas, la ecuación del movimiento queda como:

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.8)$$

que es la ecuación de ondas, donde c es la velocidad de fase de la onda.

Para llegar a este resultado ha sido necesario realizar una serie de suposiciones, algunas de las cuales se han ido nombrando, pero otras se han tomado de forma implícita en el desarrollo. En concreto, se ha asumido que los planos paralelos a la sección transversal permanecen paralelos a ella, existiendo por tanto una distribución uniforme del esfuerzo a lo largo de cada uno de ellos. Además, no hemos considerado las expansiones y contracciones laterales que producirían los esfuerzos axiales.

3.2.3.- Solución de la ecuación del movimiento

Para un medio finito unidimensional, como es el caso de la barra, es posible encontrar la solución de la ecuación de ondas en algunos casos determinados. En esta sección se exponen las condiciones que deben cumplirse para resolverla, al menos con

las técnicas encontradas en la bibliografía, y se muestra como encontrar $\xi(x,t)$ para estos casos, así como algunas soluciones particulares que serán de utilidad posterior.

3.2.3.1.- Vibraciones libres

En primer lugar, consideramos únicamente la ecuación (3.8), por lo que asumiremos que no hay ninguna fuerza aplicada sobre la barra. Las vibraciones se producen por la imposición de condiciones iniciales en el desplazamiento y en la velocidad, lo que físicamente se traduce en una compresión o tensión inicial de la barra para luego dejarla vibrar libremente.

Es sabido que la solución de la ecuación de ondas puede descomponerse en una función que recoge la parte espacial de la solución y en otra que contiene la parte temporal [3.2]:

$$\xi(x,t)=Y(x)U(t) \quad (3.9)$$

Al sustituir en la ecuación (3.8), tenemos las ecuaciones que describen cada parte de la solución:

$$c^2 \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dt^2} = -\omega^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} Y = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega^2 U = 0 \quad (3.12)$$

donde ω es, de momento, una constante de separación de variables. La solución de la ecuación (3.11) es:

$$Y(x)=A \operatorname{sen}(\beta x)+B \operatorname{cos}(\beta x) \quad \beta=\omega/c \quad (3.13)$$

mientras que la solución de la ecuación (3.12) es:

$$U(t)=C \operatorname{sen}(\omega t)+D \operatorname{cos}(\omega t) \quad (3.14)$$

La función $Y(x)$ recibe el nombre de modo normal de vibración de la barra, y describe la forma espacial que pueden adoptar las vibraciones de la barra. Para hallar las constantes de esa función, A , B y β , es necesario imponer a la ecuación (3.13) las condiciones de contorno y normalizarla. Dado el carácter senoidal del modo normal, β puede tomar un número infinito de valores discretos, valores que vienen dados como solución de una ecuación trascendente y que forman una serie infinita $\beta_{n=1 \rightarrow \infty}$. Por lo tanto, para cada par de condiciones de contorno tenemos una serie infinita y discreta de modos propios Y_n , y dado que β y ω están directamente relacionados, tendremos otra serie ω_n de las que, a la vista de la ecuación (3.14), se suelen llamar frecuencias radiales naturales de la barra, por lo que, además, también se tiene un conjunto infinito de funciones U_n .

Así, en lugar de tener una única solución para las ecuaciones (3.11) y (3.12), tenemos una serie infinita de soluciones Y_n y U_n :

$$Y_n(x) = A_n \text{sen}(\beta_n x) + B_n \text{cos}(\beta_n x) \quad (3.15)$$

$$U_n(t) = C_n \text{sen}(\omega_n t) + D_n \text{cos}(\omega_n t) \quad (3.16)$$

Por tanto, la solución general a la ecuación de onda vendrá dada por la combinación lineal de todas las soluciones posibles:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) U_n(t) \quad (3.17)$$

La forma de obtener el valor de las constantes de la ecuación (3.16), y de tener la solución completa, es mediante las condiciones iniciales. Si las condiciones iniciales son:

$$\xi(x, 0) = F(x) \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{d\xi(x, t)}{dt} \right)_{t=0} = G(x) \quad (3.19)$$

tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n Y_n(x) = F(x) \quad (3.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \omega_n Y_n(x) = G(x) \quad (3.21)$$

Una propiedad que tienen los modos normales de barras con condiciones de contorno simples (con el desplazamiento o el esfuerzo fijo en los extremos) es la de ortogonalidad con respecto a la integración del producto de dos modos normales a lo largo de la longitud de la barra. Esto quiere decir que:

$$\int_0^L Y_n(x) Y_m(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$\int_0^L Y_n^2(x) dx \equiv N \quad \text{si } m = n \quad (3.22)$$

Por tanto, si multiplicamos las ecuaciones (3.20) y (3.21) por Y_m e integramos a lo largo de la longitud de la barra, tenemos:

$$D_n = \frac{1}{N} \int_0^L Y_n(x) F(x) dx \quad (3.23)$$

$$C_n = \frac{1}{\omega_n N} \int_0^L Y_n(x) G(x) dx \quad (3.24)$$

De esta forma, conocidos D_n y C_n , tenemos completamente determinado el movimiento vibracional de la barra.

Para obtener este resultado hemos utilizado la propiedad de ortogonalidad de los modos normales. Esta propiedad puede no cumplirse para cualquier par de condiciones de contorno de la barra, por lo que es necesario estudiar y determinar en qué casos sí se cumple, y de esta forma asegurar que la solución obtenida es correcta. Para establecer cuándo se cumple la propiedad de ortogonalidad consideramos la ecuación (3.11) para Y_n , y la multiplicamos por Y_m :

$$\frac{d^2 Y_n}{dx^2} Y_m + \beta_n^2 Y_n Y_m = 0 \quad (3.25)$$

Si intercambiamos los subíndices n y m , la ecuación sigue cumpliéndose, teniendo ahora la forma:

$$\frac{d^2 Y_m}{dx^2} Y_n + \beta_m^2 Y_m Y_n = 0 \quad (3.26)$$

Al restar las ecuaciones (3.25) y (3.26) e integrar el resultado en el intervalo $0 \leq x \leq L$, obtenemos:

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 Y_n}{dx^2} Y_m - \frac{d^2 Y_m}{dx^2} Y_n \right) dx + (\beta_n^2 - \beta_m^2) \int_0^L Y_n Y_m dx = 0 \quad (3.27)$$

La integración por partes del primer término en la primera integral produce:

$$\int_0^L \frac{d^2 Y_n}{dx^2} Y_m dx = \left[\frac{dY_n}{dx} Y_m - \frac{dY_m}{dx} Y_n \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 Y_m}{dx^2} Y_n dx \quad (3.28)$$

Insertando este resultado en la ecuación (3.27) tenemos la expresión que nos permite obtener las condiciones que debe cumplir la barra para que sus modos normales sean ortogonales:

$$\left[\frac{dY_n}{dx} Y_m - \frac{dY_m}{dx} Y_n \right]_0^L + (\beta_n^2 - \beta_m^2) \int_0^L Y_n Y_m dx = 0 \quad (3.29)$$

Dado que $\beta_n \neq \beta_m$ para $n \neq m$, los modos normales serán ortogonales siempre y cuando el primer término de la ecuación (3.29) sea cero. Esto se cumplirá para cualquier combinación de condiciones de contorno que cumplan:

$$\begin{cases} a_1 Y(0) + b_1 \left(\frac{dY}{dx} \right)_{x=0} = 0 \\ a_2 Y(L) + b_2 \left(\frac{dY}{dx} \right)_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

donde a_1 , b_1 , a_2 y b_2 son constantes que pueden ser nulas o no, de forma que jugando con ellas podemos obtener condiciones de contorno de extremos fijos, libres, elásticos o cualquier combinación de éstas, por lo que aseguramos que sus modos normales de vibración serán ortogonales.

3.2.3.2.- Vibraciones forzadas

Las vibraciones forzadas se producen cuando una fuerza externa actúa sobre la barra. En este caso debemos considerar la ecuación (3.6):

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + q(x, t) = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

con la diferencia de que ahora $q(x, t)$ es la fuerza externa aplicada y no una fuerza interna. Si las condiciones de contorno son tales que los modos normales Y_n , calculados según se ha explicado en la sección anterior, son ortogonales, el desplazamiento longitudinal en cada punto de la barra puede representarse mediante un desarrollo en modos normales, de la misma forma que se ha hecho para las vibraciones libres, es decir:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) Y_n(x) \quad (3.31)$$

donde los coeficientes $a_n(t)$ recogen la información temporal y la importancia relativa de cada modo de vibración, los cuales incluyen las características espaciales de la vibración.

Al introducir esta expansión en modos normales en la ecuación del movimiento (3.6), obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(E a_n(t) \frac{d^2 Y_n}{dx^2} - \rho \frac{d^2 a_n}{dt^2} Y_n(x) \right) = -q(x, t) \quad (3.32)$$

o lo que es igual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) \right) Y_n(x) = -\frac{1}{\rho} q(x, t) \quad (3.33)$$

Si multiplicamos por Y_m , integramos respecto a la variable espacial en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y aplicamos la propiedad de ortogonalidad de los modos propios, nos queda:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = \frac{1}{N\rho} \int_0^L Y_n(x) q(x,t) dx = Q_n(t) \quad (3.34)$$

Así, para obtener cada parámetro a_n , debemos resolver la ecuación:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = Q_n(t) \quad (3.35)$$

para cada $n=1, 2, 3, \dots$. La solución de esta ecuación es:

$$a_n(t) = a_n(0) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{da_n}{dt} \right)_{t=0} \sin(\omega_n t) - \frac{1}{\omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (3.36)$$

donde $a_n(0)$ y $(da_n/dt)_{t=0}$ representan las condiciones iniciales de la barra. Una vez conocido a_n tenemos la solución completa al problema, ya que conocemos todos los términos de la ecuación (3.31).

Esta forma de obtener la solución se suele denominar expansión en modos normales. Hay otras formas de resolver la ecuación (3.6), como por ejemplo, mediante el uso de la Transformada de Laplace, la de Fourier, o de ambas a la vez, pero todas hacen uso de la ortogonalidad de los modos propios y, obviamente, todas llegan al mismo resultado.

3.2.3.3.- Soluciones para casos particulares

Una vez establecida la solución general de la ecuación del movimiento para las vibraciones longitudinales, vamos a proceder a aplicarla a distintos casos concretos. Estas soluciones nos servirán posteriormente para validar las simulaciones que realizaremos con el MSR. Hemos agrupado las soluciones según las condiciones de contorno. Así, estudiaremos la barra fija-fija (con ambos extremos fijos), libre-fija (el extremo izquierdo libre y el derecho fijo), libre-libre (ambos extremos libres) y libre-carga másica (el extremo izquierdo libre y el derecho con una carga másica), las cuales se muestran en la Figura 3.3.

a.- Barra fija-fija

Esta barra tiene ambos extremos fijos, lo que significa que el desplazamiento en cada uno de ellos es cero:

$$\begin{cases} \xi(0, t) = 0 \\ \xi(L, t) = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

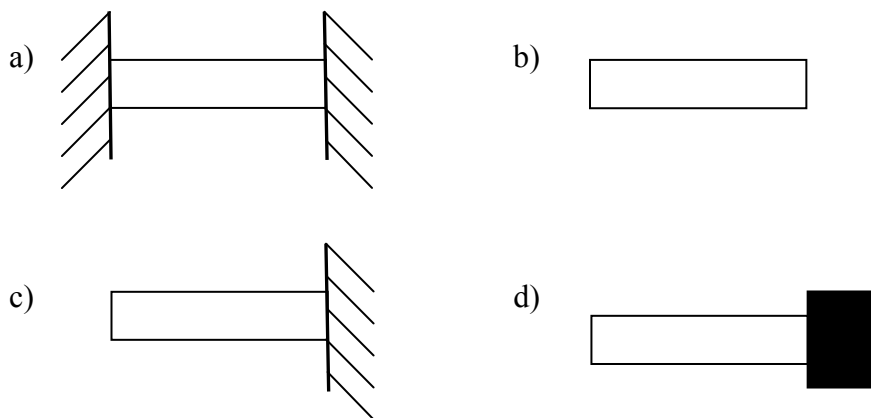


Figura 3.3. a) Barra fija-fija. b) Barra libre-libre. c) Barra libre-fija. d) Barra libre-carga másica

Por tanto, para encontrar la forma de los modos de vibración de esta barra debemos imponerle las mismas condiciones de contorno, es decir:

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(L) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

lo que produce que los modos de vibración de la barra fija-fija sean:

$$Y_n(x) = \text{sen}(\beta_n x) \quad (3.39)$$

$$\beta_n = n\pi/L; \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

con lo que las frecuencias radiales naturales de la barra son:

$$\omega_n = n\pi c/L; \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.41)$$

En la barra fija-fija no es posible aplicar fuerzas externas, por lo que lo único que se puede estudiar es el movimiento producido al imponer las condiciones de contorno. Al establecer unas condiciones de contorno cualesquiera, el movimiento

vibratorio adoptará una forma general según la ecuación (3.17). En concreto, si imponemos como condición de contorno el que la barra tenga inicialmente el desplazamiento dado por un modo de vibración $Y_i(x)$, y la velocidad inicial de los distintos puntos de la barra sea cero, al utilizar la ecuación (3.23) para hallar los coeficientes de $U_n(t)$, la ortogonalidad de los modos de vibración hace que como solución final tengamos:

$$\xi(x,t)=Y_i(x)U_i(t)=\text{sen}(\beta_i x)\cos(\omega_i t) \quad (3.42)$$

por lo que el movimiento vibracional de la barra consistirá en una onda estacionaria, cuya forma espacial será la del modo de vibración Y_i que hemos impuesto como condición inicial, la cual vibrará de forma armónica con una frecuencia radial $\omega_i=c\beta_i$.

b.- Barra libre-fija

En esta barra el extremo izquierdo está libre, mientras que el derecho se encuentra fijo. La condición de extremo libre implica que en ese punto el esfuerzo interno de la barra es cero, por lo que matemáticamente las condiciones de contorno se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \\ \xi(L,t) = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

y los modos de vibración son:

$$Y_n(x)=\cos(\beta_n x) \quad (3.44)$$

$$\beta_n=(2n+1)\pi/(2L) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

$$\omega_n=(2n+1)\pi c/(2L) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.46)$$

En este tipo de barra es posible aplicar una fuerza externa en el extremo libre, por lo que se pueden generar vibraciones forzadas. Según el tipo de fuerza aplicada, la respuesta de la barra puede variar considerablemente, ya que, por ejemplo, una fuerza impulsiva provocará cambios muy bruscos en el desplazamiento de cada punto de la barra, mientras que una fuerza que varíe lentamente provocará cambios en la barra que

se apreciarán después de un cierto intervalo de tiempo. Dada la amplia variedad de tipos de fuerza que se pueden aplicar en la barra, solo se van a estudiar los que se han considerado más representativos: una fuerza armónica, una fuerza tipo pulso cuadrado y una fuerza tipo pulso gaussiano. Veamos la solución en cada caso.

Fuerza armónica

Este tipo de fuerza presenta una variación temporal de forma armónica, según la expresión:

$$F_S(t) = A \operatorname{sen}(\omega_i t) \quad (3.47)$$

siendo A la amplitud y ω_i su frecuencia. Mediante la aplicación de las ecuaciones (3.31) y (3.36), suponiendo que la barra se encuentra inicialmente en su estado de equilibrio, y utilizando sus modos de vibración, expresados en la ecuación (3.44), hemos obtenido la fórmula que expresa el desplazamiento que se produce en la barra¹:

$$\xi(x, t) = \frac{2A}{\rho L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \operatorname{sen}(\omega_i t) - \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \operatorname{sen}(\omega_n t) \right\} \cos(\beta_n x) \quad (3.48)$$

donde β_n y ω_n vienen dados en las ecuaciones (3.45) y (3.46). El valor relativo de ω_i con respecto a $\omega_{n=1}$ determina cómo va a ser la respuesta de la barra, ya que un valor muy bajo producirá que el primer término para $n=1$ sea el dominante en toda la serie, por lo que la barra vibrará de forma homogénea a la frecuencia radial ω_i aplicada, mientras que si es mayor que $\omega_{n=1}$ intervendrán los dos términos para un gran número de sumandos de la serie, sobre todo los que pertenezcan a un n tal que los ω_n sean parecidos a ω_i , produciendo un movimiento mucho más complejo. Así mismo, cuando $\omega_i \approx \omega_n$ se produce el fenómeno de resonancia, alcanzándose una amplitud de la oscilación muy grande y vibrando toda la barra únicamente a la frecuencia aplicada.

Dado que también tiene interés, y posteriormente se hará uso de él, a partir de la expresión del desplazamiento y utilizando la ecuación (3.4), podemos calcular el esfuerzo interno en la barra:

$$\sigma(x, t) = \frac{-2AE}{\rho Lc} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_i t) - \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_n t) \right\} \text{sen}(\beta_n x) \quad (3.49)$$

Fuerza tipo pulso cuadrado

La fuerza tipo pulso cuadrado consiste en una fuerza constante que se aplica durante los instantes iniciales del movimiento para luego bruscamente hacerse nula. Su forma matemática es:

$$F_{pc} = A p(t) \quad (3.50)$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases} \quad (3.51)$$

donde A es la amplitud de la fuerza, $p(t)$ es la función escalón y t_1 el tiempo durante el que se aplica. En esta fuerza el parámetro que determina la respuesta de la barra es t_1 , ya que si es grande, la fuerza está mucho tiempo actuando sobre la barra, mientras que si es muy pequeño, la fuerza se puede considerar impulsiva. La expresión que hemos obtenido para el desplazamiento al aplicar este tipo de fuerza a la barra es:

$$\xi(x, t) = \frac{2A}{\rho L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \cos(\beta_n x) \{ \text{sen}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_n t_1) + \cos(\omega_n t) \cos(\omega_n t_1) - \cos(\omega_n t) \} \quad (3.52)$$

y para el esfuerzo:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) = \frac{2AE}{\rho Lc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{\omega_n} \text{sen}(\beta_n x) \{ \text{sen}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_n t_1) + \\ + \cos(\omega_n t) \cos(\omega_n t_1) - \cos(\omega_n t) \} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Fuerza tipo pulso gaussiano

Esta fuerza tiene la forma:

$$F_{pg} = A g(t) \quad (3.54)$$

¹ En algunos libros de la bibliografía [3.2, 3.3] se presenta otra solución para este caso que, a nuestro juicio, es errónea.

$$g(t) = \exp[-m^2(t-t_1)^2] \quad (3.55)$$

que, como se puede observar, consiste en una función gaussiana, de forma que cuando m es muy grande, se aproxima a un impulso aplicado en t_1 . Al introducirla en las ecuaciones (3.31) y (3.36), se llega a una integral no resoluble analíticamente, por lo que no podemos encontrar explícitamente la respuesta de la barra. Sin embargo, en la práctica usamos esta función para simular la aplicación de un impulso, por lo que trabajaremos con un n alto. Teniendo esto en cuenta, podemos obtener una solución analítica aproximada sustituyendo la función gaussiana $g(t)$ por una delta de Dirac:

$$g(t) \cong \sqrt{\pi} \delta(t - t_1) / m \quad (3.56)$$

Con esta aproximación, la solución para el desplazamiento de los distintos elementos de la barra para $t \geq t_1$ es:

$$\xi(x, t) = \frac{-2A\sqrt{\pi}}{\rho L m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \cos(\beta_n x) \text{sen}[\omega_n(t - t_1)] \quad t \geq t_1 \quad (3.57)$$

y para el esfuerzo:

$$\sigma(x, t) = \frac{2AE\sqrt{\pi}}{\rho L c m} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_n x) \text{sen}[\omega_n(t - t_1)] \quad t \geq t_1 \quad (3.58)$$

c.- Barra libre-libre

La barra libre-libre tiene los dos extremos libres, por lo que el esfuerzo en ambos extremos es cero, lo que se traduce en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Con estas condiciones de contorno los modos de vibración y las frecuencias radiales naturales para esta barra son:

$$Y_n = \cos(\beta_n x) \quad (3.60)$$

$$\beta_n = n\pi/L \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.61)$$

$$\omega_n = n\pi c/L \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

A diferencia de otras condiciones de contorno, en esta barra la serie de modos de vibración comienza en $n=0$. Dicho modo de vibración corresponde a un movimiento general de la barra como un sólido rígido, y es la expresión matemática del hecho de que, al estar ambos extremos de la barra libres y carecer de ligaduras, la aplicación de una fuerza en un extremo provocará que ésta se desplace como un todo, aparte de los movimientos vibratorios internos que se produzcan.

Fuerza armónica

La expresión que hemos hallado para el desplazamiento en la barra libre-libre al aplicar la fuerza armónica (ecuación (3.47)) es:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = \frac{2A}{\rho L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_i t) - \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_n t) \right\} \cos(\beta_n x) - \\ - \frac{A}{\rho L} \left\{ \frac{t}{\omega_i} + \frac{\text{sen}(\omega_i t)}{\omega_i^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde β_n y ω_n se determinan según las ecuaciones (3.61) y (3.62). En esta expresión vemos que el último corchete crece de forma lineal con el tiempo, expresando que la barra como un todo sufre un desplazamiento global debido a la fuerza que se ha ejercido sobre ella. El resto de términos son los que expresan las vibraciones longitudinales que se producen en la barra. Así pues, se puede separar el movimiento vibratorio de los distintos elementos de la barra del movimiento de ésta como un sólido rígido.

Para completar el estudio de la respuesta de la barra, el esfuerzo interno al aplicar esta fuerza es:

$$\sigma(x, t) = \frac{-2AE}{\rho Lc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_n}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_i t) - \frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_n^2} \text{sen}(\omega_n t) \right\} \text{sen}(\beta_n x) \quad (3.64)$$

Fuerza tipo pulso cuadrado

La expresión que hemos calculado para el desplazamiento al aplicar el pulso cuadrado (ecuación 3.50) es:

$$\xi(x, t) = \frac{2A}{\rho L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \cos(\beta_n x) \{ \text{sen}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_n t_1) + \cos(\omega_n t) \cos(\omega_n t_1) - \cos(\omega_n t) \} + \frac{A}{\rho L} \left\{ -\frac{t_1^2}{2} + t \cdot t_1 \right\} \quad (3.65)$$

donde β_n y ω_n vienen dados por las ecuaciones (3.61) y (3.62), y t_1 es el tiempo de aplicación de la fuerza. De nuevo aparece un término que crece linealmente con el tiempo, indicando el movimiento como sólido rígido de la barra libre-libre. La expresión del esfuerzo en los distintos elementos de la barra es:

$$\sigma(x, t) = \frac{-2AE}{\rho Lc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \text{sen}(\beta_n x) \{ \text{sen}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_n t_1) + \cos(\omega_n t) \cos(\omega_n t_1) - \cos(\omega_n t) \} \quad (3.66)$$

Fuerza tipo pulso gaussiano

Al igual que en la barra libre-fija, para poder obtener un resultado analítico es necesario aproximar la función gaussiana (ecuación (3.55)) por una función delta de Dirac. Al hacer esto, la expresión que hemos obtenido para el desplazamiento es:

$$\xi(x, t) = \frac{-2A\sqrt{\pi}}{\rho Lm} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \cos(\beta_n x) \text{sen}[\omega_n (t - t_1)] - \frac{2A\sqrt{\pi}}{\rho Ln} (t - t_1) \quad t \geq t_1 \quad (3.67)$$

donde β_n y ω_n se determinan según las ecuaciones (3.61) y (3.62). Se puede observar que, de nuevo, aparece un término lineal con el tiempo.

El esfuerzo en la barra viene dado por la expresión:

$$\sigma(x, t) = \frac{2AE\sqrt{\pi}}{\rho Lcm} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\beta_n x) \text{sen}[\omega_n (t - t_1)] \quad t \geq t_1 \quad (3.68)$$

d.- Barra libre-carga másica

La condición de contorno de carga másica es intermedia entre las de extremo libre y fijo, ya que consiste en una masa puntual unida al extremo, de forma que éste no se encuentra totalmente libre, pero tampoco fijo. La expresión matemática de esta condición de contorno es:

$$-SE\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)_{x=L} = m\left(\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}\right)_{x=L} \quad (3.69)$$

siendo m el valor de la masa puntual colocada en el extremo, S la sección de la barra y E el módulo de Young. Dependiendo de la relación entre estos valores, el comportamiento de la barra puede variar mucho, de forma que si m es muy grande la barra se comporta como si dicho extremo fuera fijo, y si m tiene un valor pequeño la respuesta de la barra será semejante a cuando éste se encuentra libre.

El problema que aparece al trabajar con esta condición de contorno es que ni el desplazamiento ni el esfuerzo son constantes, sino que varían con el tiempo y además están relacionados entre sí por la ecuación (3.69). Esto hace que no se verifiquen las condiciones de la ecuación (3.30), que nos indican cuándo los modos propios de una barra son ortogonales, por lo que no es posible calcular la expresión analítica del desplazamiento de los distintos puntos de la barra, al menos con las técnicas encontradas en la bibliografía.

Sin embargo, es posible obtener otro tipo de información analítica sobre el comportamiento de la barra. Para numerosas situaciones prácticas no es necesario disponer de los datos correspondientes a la evolución temporal del desplazamiento, sino que basta con conocer las frecuencias naturales de la barra. Además, el conocer las frecuencias naturales nos servirá posteriormente para poder tener algún elemento de validación a la hora de simular esta barra con el MSR. Así, para obtener las frecuencias radiales naturales de la barra libre-carga másica es necesario resolver la ecuación trascendente [3.4]:

$$\text{sen}(\beta L) + \frac{m}{M}\beta L \cos(\beta L) = 0 \quad (3.70)$$

donde M es la masa total de la barra y $\beta=\omega/c$.

3.3.- Vibraciones transversales

3.3.1.- Introducción

Al igual que al estudiar las vibraciones longitudinales, deduciremos la ecuación del movimiento de las vibraciones transversales considerando un elemento diferencial de la barra y las distintas fuerzas y momentos que actúan sobre él. Sin embargo, a diferencia de las vibraciones longitudinales, no hay una teoría única de las vibraciones transversales sino que, dependiendo de las hipótesis y consideraciones efectuadas, existen diferentes modelos para este fenómeno físico. En general, se puede decir que hay cuatro modelos principales reconocidos en la bibliografía [3.2, 3.5]:

- Modelo de Euler-Bernoulli.
- Modelo de Rayleigh.
- Modelo de cizalladura (“shear model”).
- Modelo de Timoshenko.

Cada uno de ellos es más complejo que el anterior, aunque en la práctica se suele trabajar únicamente con dos: el modelo de Euler-Bernoulli, que es el más simple, y el de Timoshenko, que es el más complejo y completo [3.2 y 3.5]. Veámos estos dos modelos.

3.3.2.- Modelo de Euler-Bernoulli

3.3.2.1.- Dedución de la ecuación del movimiento

Consideremos una barra delgada bajo un movimiento transversal, como la mostrada en la Figura 3.4.a. Cada elemento diferencial de esta barra está sometido a una serie de fuerzas transversales y momentos de torsión que provocan un desplazamiento vertical del mismo, como se puede observar en la Figura 3.4.b. Así, en el extremo

izquierdo del elemento actúa una fuerza transversal o cortante $V(x,t)$ y un momento de torsión $M(x,t)$, mientras que en el extremo derecho actúa una fuerza transversal $V(x+dx,t)$ y un momento de torsión $M(x+dx,t)$, y directamente sobre el elemento diferencial una fuerza distribuida $q(x,t)$ que puede ser interna o externa.

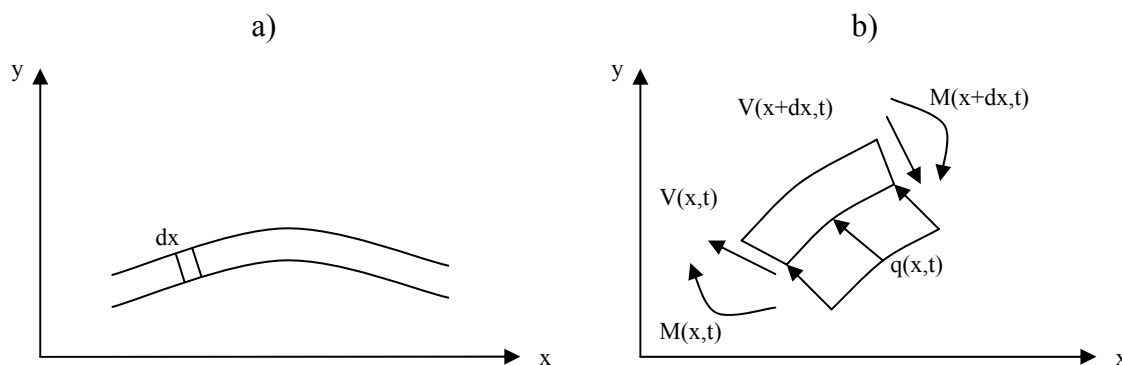


Figura 3.4. a) Barra sujeta a un movimiento transversal. b) Elemento diferencial de la barra.

Para poder seguir con la deducción de la ecuación del movimiento es necesario realizar suposiciones sobre cómo se va a comportar la barra. La hipótesis básica del modelo de Euler-Bernoulli consiste en que los planos inicialmente perpendiculares al eje de la barra permanecen planos y perpendiculares a él durante el movimiento. El eje de la barra, también llamado eje neutro, une aquellos puntos de la barra que no sufren una dilatación o una contracción longitudinal durante el movimiento transversal. Esta hipótesis implica que la deformación longitudinal varía linealmente con la profundidad de la barra y que el eje neutro pasa a través del centroide de la sección transversal de la barra. Esta suposición implica, además, que la relación entre el momento de torsión y la curvatura es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M/(EI) \quad (3.71)$$

donde y es el desplazamiento transversal del elemento diferencial, E el módulo de Young e I el momento de inercia transversal de la barra.

Al aplicar la segunda ley de Newton al elemento diferencial de la barra mostrado en la Figura 3.4.b, resulta:

$$-V(x, t) + V(x + dx, t) + q(x, t)dx = \rho S dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.72)$$

donde S es el área transversal de la barra y ρ su densidad. Dado que tenemos un elemento diferencial, se puede aproximar $V(x+dx, t)$ por $V(x, t) + (\partial V/\partial x)dx$, por lo que la ecuación anterior queda:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho S \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.73)$$

En este punto es necesario considerar alguna ecuación constitutiva de la barra que nos proporcione la relación entre la fuerza transversal V y el desplazamiento y . Si despreciamos los efectos de inercia rotacional del elemento, la fuerza transversal se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.74)$$

Utilizando la ecuación (3.71) en la ecuación (3.74), e introduciendo la resultante en la ecuación de movimiento (3.73), tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3.75)$$

que es la ecuación diferencial para las vibraciones transversales de una barra delgada, con el modelo de Euler-Bernoulli. Si no hay una fuerza aplicada $q(x, t)$ y la barra es homogénea, de forma que E , I , S y ρ sean constantes, la ecuación (3.75) queda de la forma:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad a^2 = \frac{EI}{\rho S} \quad (3.76)$$

3.3.2.2.-Vibraciones libres

A pesar de que la ecuación (3.76) ya no tiene la forma de la ecuación de ondas, la manera de encontrar su solución es muy similar. Al igual que en el caso de las

vibraciones longitudinales, se puede descomponer la solución en una función espacial y otra temporal:

$$y(x,t)=Y(x)U(t) \quad (3.77)$$

que se obtienen resolviendo las ecuaciones diferenciales:

$$a^2 \frac{1}{Y} \frac{d^4 Y}{dx^4} = - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dt^2} = \omega^2 \quad (3.78)$$

Así, la solución para $U(t)$ es:

$$U(t)=B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sen(\omega t) \quad (3.79)$$

y la de $Y(x)$:

$$Y(x)=C_1 \sen(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (3.80)$$

$$\beta^4=\omega^2/a^2 \quad (3.81)$$

Del mismo modo que en las vibraciones longitudinales, $Y(x)$ sigue siendo el modo normal de la barra. Las constantes de la ecuación (3.80) se obtienen imponiendo las condiciones de contorno y normalizando la función $Y(x)$. Al hacer ésto, se obtiene de nuevo que β solo puede tomar un número infinito de valores discretos que se obtienen resolviendo una ecuación trascendente que depende de las condiciones de contorno de la barra, por lo que tendremos una serie de modos propios Y_n , cada uno de ellos asociado a una frecuencia natural $\omega_n=a\beta^2$.

La solución para las vibraciones libres, con las condiciones iniciales $f(x)$ y $g(x)$:

$$y(x,0)=f(x) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x,t=0} = g(x) \quad (3.82)$$

viene dada por:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sen(\omega_n t)) Y_n(x) \quad (3.83)$$

donde A_n y B_n se determinan, en el caso de que los modos propios sean ortogonales, de la siguiente manera:

$$A_n = \frac{1}{N} \int_0^L f(x) Y_n(x) dx \quad B_n = \frac{1}{N \omega_n} \int_0^L g(x) Y_n(x) dx \quad (3.84)$$

siendo N el factor de normalización dado por:

$$N = \int_0^L Y_n^2(x) dx \quad (3.85)$$

Dada la restricción de que los modos normales deben ser ortogonales para poder obtener la solución, es necesario conocer las condiciones que deben cumplir los modos de vibración o las condiciones de contorno para que lo sean. Haciendo un desarrollo similar al efectuado en la Sección 3.2.3.1, se llega a la conclusión de que dos modos de vibración de una barra, $Y_n(x)$ e $Y_m(x)$, con unas determinadas condiciones de contorno son ortogonales cuando se cumple que:

$$\left[Y_m \frac{d^3 Y_n}{dx^3} - \frac{dY_m}{dx} \frac{d^2 Y_n}{dx^2} + \frac{d^2 Y_m}{dx^2} \frac{dY_n}{dx} - \frac{d^3 Y_m}{dx^3} Y_n \right]_0^L = 0 \quad (3.86)$$

Esto se cumple para cualquier combinación de condiciones de contorno que tenga la forma:

$$aY + b \frac{dY}{dx} + c \frac{d^2 Y}{dx^2} + d \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 \quad (3.87)$$

donde a , b y c son constantes determinadas por las condiciones de contorno de la barra.

3.3.2.3.- Vibraciones forzadas

El procedimiento para el estudio de vibraciones transversales forzadas es análogo al realizado para vibraciones longitudinales con la diferencia de que en las vibraciones transversales la fuerza externa puede aplicarse en cualquier punto de la barra, no solo en un extremo libre.

La ecuación del movimiento para las vibraciones transversales forzadas es:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3.88)$$

Se puede asumir que la solución $y(x, t)$ es susceptible de ser desarrollada en función de los modos normales de vibración $Y_n(x)$ y de funciones temporales $q_n(t)$, por lo que ésta viene dada por:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) Y_n(x) \quad (3.89)$$

Haciendo un desarrollo similar al efectuado en la Sección 3.2.3.2, se puede demostrar que si los modos de vibración son ortogonales, $q_n(t)$ se puede obtener mediante:

$$q_n(t) = -\frac{1}{\rho S \omega_n} \int_0^L Q_n(\tau) \text{sen}[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (3.90)$$

donde $\omega_n^2 = a^2 \beta_n^4$ y $Q_n(t)$ es:

$$Q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) Y_n(x) dx \quad (3.91)$$

3.3.2.4.- Algunos casos particulares

En esta sección se muestran las soluciones para el desplazamiento vertical y la fuerza transversal en algunos casos concretos de interés.

a.- Barra apoyada en los dos extremos

Esta barra representa el caso más fácil de estudiar (ver Figura 3.5), ya que al aplicar a la ecuación (3.80) sus condiciones de contorno, desplazamiento y momento nulo en cada extremo:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=0,t} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=L,t} = 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

y la condición de normalización, se obtiene que sus modos de vibración son:

$$Y_n(x) = \text{sen}(\beta_n x) \quad (3.94)$$

$$\beta_n = n\pi/L; \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.95)$$

Estos modos son los más simples que se pueden obtener al trabajar con vibraciones transversales, lo que hace que las distintas soluciones se puedan obtener de forma similar a las vibraciones longitudinales.

Las fuerzas transversales aplicadas que estudiamos son las mismas que las consideradas en las vibraciones longitudinales, con la diferencia de que ahora se pueden aplicar en cualquier punto de la barra, con excepción de los extremos no libres. Por tanto, el punto de aplicación de la fuerza habrá de ser considerado a la hora de resolver la ecuación (3.88) y obtener la solución.

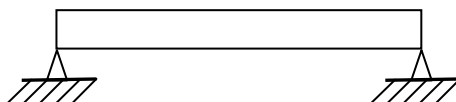


Figura 3.5. Barra apoyada en los dos extremos.

Fuerza armónica

La fuerza armónica tiene ahora la forma:

$$F_{TS}(x_0,t) = A\delta(x-x_0)\text{sen}(\omega_i t) \quad (3.96)$$

donde A es la amplitud de la fuerza aplicada, x_0 el punto de aplicación y ω_i su frecuencia. Usando las ecuaciones (3.89), (3.90), (3.91) y (3.94) hemos obtenido que el desplazamiento vertical al aplicar esta fuerza transversal es:

$$y(x, t) = \frac{2A}{SpL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\beta_n x) \text{sen}(\beta_n x_0)}{a\beta_n^2} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - a^2\beta_n^4} \text{sen}(a\beta_n^2 t) - \frac{a\beta_n^2}{\omega_i^2 - a^2\beta_n^4} \text{sen}(\omega_i t) \right] \quad (3.97)$$

con β_n obtenido mediante la ecuación (3.95). La fuerza interna transversal viene dada en este caso por:

$$V(x, t) = \frac{2A}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\beta_n \cos(\beta_n x) \text{sen}(\beta_n x_0)}{\omega_i^2 - a^2\beta_n^4} [\omega_i \text{sen}(a\beta_n^2 t) - a\beta_n^2 \text{sen}(\omega_i t)] \quad (3.98)$$

Fuerza tipo pulso cuadrado

Como ya se comentó, la fuerza tipo pulso cuadrado consiste en una fuerza constante que se aplica durante un determinado intervalo de tiempo. Su expresión matemática es:

$$F_{TPc} = A\delta(x-x_0)p(t) \quad (3.99)$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases} \quad (3.100)$$

siendo A el valor de la fuerza, x_0 el punto de aplicación y t_1 el tiempo durante el cual se mantiene aplicada la fuerza sobre la barra. La expresión para el desplazamiento transversal en la barra apoyada en los dos extremos al aplicar esta fuerza que hemos calculado a partir de (3.89), (3.90), (3.91) y (3.94) es:

$$y(x, t) = \frac{4A}{SpL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\beta_n x) \text{sen}(\beta_n x_0)}{a^2\beta_n^4} \text{sen}(a\beta_n^2(t - t_1/2)) \text{sen}(a\beta_n^2 t_1/2) \quad (3.101)$$

donde, de nuevo, β_n se obtiene a partir de la ecuación (3.95). La fuerza transversal se obtiene a partir de:

$$V(x, t) = \frac{4A}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x) \text{sen}(\beta_n x_0)}{\beta_n} \text{sen}(a\beta_n^2(t - t_1/2)) \text{sen}(a\beta_n^2 t_1/2) \quad (3.102)$$

Fuerza tipo pulso gaussiano

La expresión matemática de esta fuerza es:

$$F_{TPg} = A\delta(x-x_0)g(t) \quad (3.103)$$

$$g(t) = \exp[-m^2(t-t_1)^2] \quad (3.104)$$

donde A es el valor de la fuerza aplicada y x_0 el punto de aplicación. Dado que no se puede resolver analíticamente la integral de la ecuación (3.91), es necesario aproximar esta fuerza por un impulso aplicado en t_1 :

$$F_{TPg} \cong A\sqrt{\pi}\delta(t-t_1)/m \quad (3.105)$$

Al trabajar con esta aproximación e introducirla en las ecuaciones (3.89), (3.90), (3.91) y (3.94), hemos obtenido que el desplazamiento vertical viene dado por:

$$y(x, t) = \frac{2A\sqrt{\pi}}{\rho SLm} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\beta_n x_0) \text{sen}(\beta_n x) \text{sen}(a\beta_n^2(t-t_1))}{a\beta_n^2} \quad (3.106)$$

y la fuerza transversal por:

$$V(x, t) = \frac{2A\sqrt{\pi}}{Lm} \sum_{n=1}^{\infty} a\beta_n \text{sen}(\beta_n x_0) \cos(\beta_n x) \text{sen}(a\beta_n^2(t-t_1)) \quad (3.107)$$

donde, como en todos los casos en los que se trabaja con este tipo de barra, β_n se obtiene a partir de la ecuación (3.95).

b.-Barra con un extremo amordazado y el otro con carga másica

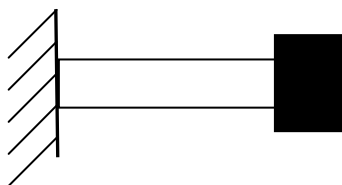


Figura 3.6. Barra con un extremo amordazado y el otro con carga másica

En este caso (Figura 3.6), la condición de contorno de extremo amordazado implica que ese extremo se encuentra fijo de tal forma que el desplazamiento y su primera derivada son nulos:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0,t} = 0 \end{cases} \quad (3.108)$$

mientras que la condición de carga másica puntual hace que el momento de torsión en ese extremo sea nulo, y que la fuerza transversal en el extremo dependa de la aceleración del mismo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} = 0 \\ EI \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.109)$$

siendo m la masa de la carga másica. Del mismo modo que ocurre en las vibraciones longitudinales, al tener una carga másica en un extremo los modos de vibración no son ortogonales, por lo que no es posible obtener una solución analítica del movimiento vibratorio transversal de la barra. La única información teórica que puede obtenerse en este caso son las frecuencias naturales de vibración, las cuales se calculan resolviendo la siguiente ecuación trascendente [3.6]:

$$EI [1 + \cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L)] = m a^2 \beta [\sin(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) - \cos(\beta_n L) \sinh(\beta_n L)] \quad (3.110)$$

con

$$\omega_n = a \beta_n^2 \quad (3.111)$$

3.3.3.- Modelo de Timoshenko

3.3.3.1.- Dedución de la ecuación del movimiento

En el desarrollo de la ecuación del movimiento en el modelo de Euler-Bernoulli se tiene en cuenta como hipótesis importante que los planos inicialmente perpendiculares al eje neutro permanecen planos y perpendiculares al mismo. Esta hipótesis es equivalente a despreciar la deformación por cizalladura [3.2, 3.5], lo que provoca que dicho modelo solo sea válido en el caso de que la longitud de la barra sea mucho mayor que su anchura o su altura. En el modelo de Timoshenko se tiene en

cuenta esta deformación, lo que permite aplicarlo a un mayor número de casos y proporciona resultados más realistas.

Para deducir la ecuación del movimiento, consideremos un elemento de la barra sujeto a una serie de fuerzas transversales, momentos de torsión y cargas aplicadas (Figura 3.7). Al igual que en el modelo de Euler-Bernoulli, el desplazamiento del plano del centroide se mide por y' , y la pendiente del eje del centroide por $\partial y'/\partial x'$. Se introduce la coordenada ψ para medir la pendiente de la sección transversal debida a la torsión del elemento, coordenada que en el modelo de Euler-Bernoulli no aparece debido a que esa pendiente es la misma que la del eje del centroide, $\partial y'/\partial x'$. En la Figura 3.8 se muestra la deformación por cizalladura del elemento de la barra. Así, la pendiente del eje del centroide es consecuencia de la suma de dos contribuciones. La primera, ψ , es debida a la torsión del elemento, mientras que la segunda, γ_0 , que es la novedad de este modelo, se debe a la deformación del elemento. Así, tenemos que

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \psi + \gamma_0 \quad (3.112)$$

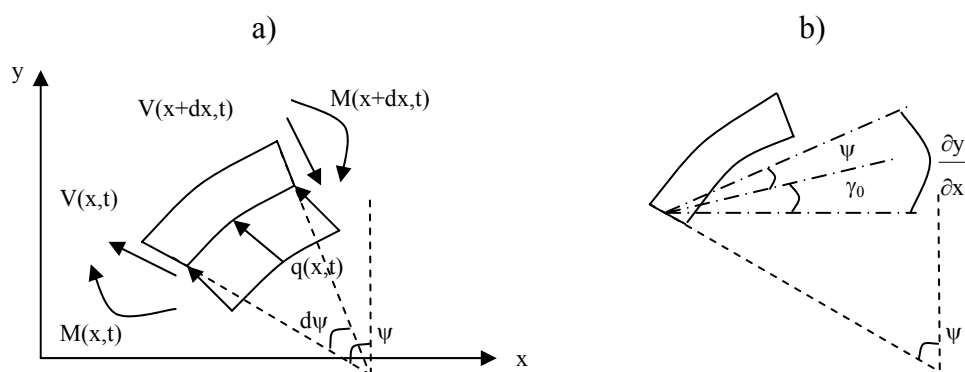


Figura 3.7. a) Elemento diferencial de la barra. b) Relación entre ψ , γ_0 y $\partial y/\partial x$.

Para poder relacionar estos parámetros con las fuerzas y momentos en la barra, asumimos que se sigue manteniendo la relación entre el momento de torsión y la curvatura que consideramos en el modelo de Euler-Bernoulli. Dado que $Rd\psi=dx'$,

² En esta sección se usará como notación el que las variables con prima son dimensionales mientras que sin prima son adimensionales

donde R es el radio de curvatura, resulta que la curvatura es $1/R=d\psi/dx'$, por lo que se tiene la relación:

$$\frac{M'}{EI} = -\frac{\partial\psi}{\partial x'} \quad (3.113)$$

La fuerza cortante en la sección transversal se puede expresar en términos del esfuerzo transversal τ o la deformación por cizalladura γ como

$$V' = \int_S \tau dS = G \int_S \gamma dS \quad (3.114)$$

donde G es el coeficiente de rigidez o cizalladura. Si la distribución del esfuerzo a lo largo de la sección fuera uniforme, la fuerza transversal vendría dada por $G\gamma_0 S$, donde γ_0 es la deformación en el eje del centroide. Sin embargo, dado que no lo es, es necesario introducir el parámetro κ , llamado factor de forma [3.5], de manera que se cumpla que:

$$V' = G \int_S \gamma dS = G\gamma_0 S\kappa \quad (3.115)$$

El valor de κ depende de la forma de la sección transversal y debe ser determinado para cada una. Si utilizamos la expresión (3.112) para sustituir el parámetro γ_0 en la ecuación (3.115), se obtiene que la fuerza transversal se puede expresar como:

$$V' = SG\kappa \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} - \psi \right) \quad (3.116)$$

Una vez establecidas las ecuaciones constitutivas para los momentos de torsión y las fuerzas transversales, la obtención de la ecuación del movimiento se realiza de una manera directa. Aplicando la segunda ley de Newton al elemento diferencial de la barra mostrado en la Figura 3.7 se obtiene que:

$$-V' + \left(V' + \frac{\partial V'}{\partial x'} dx' \right) + q' dx = \rho S dx' \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} \quad (3.117)$$

la cual, al simplificar, queda como

$$\frac{\partial V'}{\partial x'} + q' = \rho S \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} \quad (3.118)$$

La suma de los momentos de torsión aplicados al elemento diferencial produce la ecuación:

$$M' - \left(M' + \frac{\partial M'}{\partial x'} dx' \right) + \frac{1}{2} V' dx' + \frac{1}{2} \left(V' + \frac{\partial V'}{\partial x'} dx' \right) dx' = \rho I dx' \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \quad (3.119)$$

siendo I el momento de inercia transversal de la barra. Al simplificar esta ecuación queda en la forma:

$$V' - \frac{\partial M'}{\partial x'} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \quad (3.120)$$

Las ecuaciones del movimiento surgen al introducir las expresiones (3.113) y (3.116) en las ecuaciones (3.118) y (3.120) respectivamente, que quedan en la forma:

$$GS\kappa \left(\frac{\partial \psi}{\partial x'} - \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} = q'(x', t') \quad (3.121)$$

$$GS\kappa \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \quad (3.122)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales acopladas son las ecuaciones del movimiento para las vibraciones transversales en una barra en el modelo de Timoshenko.

3.3.3.2.- Adimensionalización y desacoplamiento

A la hora de resolver analíticamente las ecuaciones del movimiento es útil adimensionalizarlas, para trabajar con menos parámetros, y desacoplarlas, de forma que nos queden dos ecuaciones diferenciales independientes, aunque de un orden mayor.

Para llevar a cabo la adimensionalización, definimos los coeficientes:

$$\alpha = \frac{I}{SL^2} \quad \beta = \frac{I}{SL^2} \frac{E}{\kappa G} = \alpha \frac{E}{\kappa G} \quad (3.123)$$

en los que está recogida la información sobre las características físicas de la barra.

Posición	Desplazamiento	Tiempo	Fuerza Transversal	Momento de Torsión	Frecuencia
$x=x^*/L$	$y=y^*/L$	$t=t^*(EIG/\rho SL^4)^{1/2}$	$V=V^*/(SG\kappa)$	$M=M^*L/(EI)$	$f=f^*/(EIG/\rho SL^4)^{1/2}$

Tabla 3.1. Definición de las variables adimensionales en el modelo de Timoshenko.

Utilizando estos coeficientes, y definiendo las variables adimensionales de la Tabla 3.1, se obtiene que las ecuaciones de movimiento adimensionales se pueden escribir como:

$$\frac{1}{\beta} V - \frac{\partial M}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.125)$$

donde se asume que la carga aplicada es nula. Las ecuaciones constitutivas adimensionales quedan como:

$$V = \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \quad (3.126)$$

$$M = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.127)$$

El desacoplamiento de las ecuaciones (3.124) y (3.125) se lleva a cabo mediante su diferenciación con respecto a x y la incorporación de las ecuaciones (3.126) y (3.127), quedando en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha \beta \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha \beta \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 \quad (3.129)$$

Dada la simetría de estas dos ecuaciones, es mucho más cómodo definir un vector solución definido de la forma:

$$S(x, t) \equiv \begin{cases} y(x, t) \\ \psi(x, t) \end{cases} \quad (3.130)$$

de modo que cumple la ecuación:

$$\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha\beta \frac{\partial^4 S}{\partial t^4} = 0 \quad (3.131)$$

3.3.3.3.-Vibraciones libres

Las solución de la ecuación (3.131) tiene una parte espacial y otra temporal, por lo que tendrá la forma:

$$S(x, t) = T(t)Y(x) \quad (3.130)$$

Si se asume una solución armónica para la parte temporal, $T(t)=e^{i\omega t}$, la ecuación que proporciona la parte espacial es:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + \omega^2(\alpha + \beta) \frac{d^2 Y}{dx^2} - \omega^2(1 - \alpha\beta\omega^2)Y = 0 \quad (3.131)$$

La solución de esta ecuación depende del valor de ω [3.7]. Si se cumple que $\omega < (\alpha\beta)^{-1/2}$, la solución viene dada por:

$$Y = \begin{cases} c_1 \\ d_1 \end{cases} \text{sen}(ax) + \begin{cases} c_2 \\ d_2 \end{cases} \text{cos}(ax) + \begin{cases} c_3 \\ d_3 \end{cases} \text{senh}(bx) + \begin{cases} c_4 \\ d_4 \end{cases} \text{cosh}(bx) \quad \omega < 1/\sqrt{\alpha\beta} \quad (3.132)$$

$$a = \sqrt{\omega^2(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.133)$$

$$b = \sqrt{-\omega^2(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.134)$$

En el caso de que se verifique que $\omega > (\alpha\beta)^{-1/2}$, la solución es:

$$Y = \begin{cases} \tilde{c}_1 \\ \tilde{d}_1 \end{cases} \text{sen}(ax) + \begin{cases} \tilde{c}_2 \\ \tilde{d}_2 \end{cases} \text{cos}(ax) + \begin{cases} \tilde{c}_3 \\ \tilde{d}_3 \end{cases} \text{sen}(\tilde{b}x) + \begin{cases} \tilde{c}_4 \\ \tilde{d}_4 \end{cases} \text{cos}(\tilde{b}x) \quad \omega > 1/\sqrt{\alpha\beta} \quad (3.135)$$

$$\tilde{b} = \sqrt{\omega^2 (\alpha + \beta) / 2 - \sqrt{\omega^4 (\alpha - \beta)^2 / 4 + \omega^2}} \quad (3.136)$$

A la frecuencia radial $\omega_c = (\alpha\beta)^{1/2}$ se le suele llamar frecuencia crítica, ya que marca la transición entre usar una función u otra. Además, se puede comprobar que para $\omega = \omega_c$ se cumple que:

$$\begin{aligned} a_{\omega_c} &= \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}} \\ b_{\omega_c} &= \tilde{b}_{\omega_c} = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Del mismo modo que con los modelos estudiados anteriormente, $Y(x)$ es un modo de vibración de la barra, solo que en este caso depende de dos parámetros, a y b o \tilde{b} . La imposición de las condiciones de contorno a las ecuaciones (3.132) y (3.135) fija qué valores pueden tomar esos parámetros y, por tanto, la forma que va a adoptar el modo. Dado que las condiciones de contorno dictan los valores de a , \tilde{b} y b , es necesario expresar ω en función de dichos parámetros. Así, la expresión de ω toma la forma:

$$\omega^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-1 + \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 (\alpha - \beta)^2}}{(\alpha - \beta)^2 / 2} \quad (3.138)$$

$$\omega^2 = \frac{a^2 + \tilde{b}^2}{\alpha + \beta} \quad (3.139)$$

Así, una vez establecidos los modos y las frecuencias naturales de la barra, la solución para el movimiento de la barra cuando se imponen condiciones iniciales sobre ésta es:

$$\text{Condiciones iniciales:} \quad S(x,0) = \begin{Bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{Bmatrix} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{t=0} = \begin{Bmatrix} F(x) \\ G(x) \end{Bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\text{Solución:} \quad S(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \cos(\omega_n t) + \begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega_n t) \right) Y_n(x) \quad (3.141)$$

donde A_n , B_n , C_n y D_n se calculan, si los modos de vibración son ortonormales, mediante las expresiones [3.5]:

$$\begin{cases} A_n \\ B_n \end{cases} = \frac{1}{N} \int_0^L \begin{cases} f(x) \\ g(x) \end{cases} Y_n(x) dx \quad \begin{cases} C_n \\ D_n \end{cases} = \frac{1}{N} \int_0^L \begin{cases} F(x) \\ G(x) \end{cases} Y_n(x) dx \quad (3.142)$$

$$N = \int_0^L Y^T M(Y) dx \quad (3.143)$$

donde M es un operador definido por la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

Una cuestión que puede tener su importancia en la obtención de la solución es la relación entre los coeficientes c_n , d_n , \tilde{c}_n y \tilde{d}_n . En [3.5] puede encontrarse esta relación entre coeficientes:

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{a^2 - \beta\omega^2}{a} c_2 & d_2 &= \frac{a^2 - \beta\omega^2}{a} c_1 \\ d_3 &= \frac{b^2 + \beta\omega^2}{b} c_4 & d_4 &= \frac{b^2 + \beta\omega^2}{b} c_3 \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= -\frac{a^2 - \beta\omega^2}{a} \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 &= \frac{a^2 - \beta\omega^2}{a} \tilde{c}_1 \\ \tilde{d}_3 &= -\frac{\tilde{b}^2 - \beta\omega^2}{\tilde{b}} \tilde{c}_4 & \tilde{d}_4 &= \frac{\tilde{b}^2 - \beta\omega^2}{\tilde{b}} \tilde{c}_3 \end{aligned} \quad (3.146)$$

3.3.3.4.-Vibraciones forzadas

La solución a la ecuación del movimiento cuando hay aplicada una fuerza externa se obtiene, del mismo modo que en los modelos de vibración anteriores, mediante su desarrollo en modos ortogonales:

$$S(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) Y_i(x) \quad (3.147)$$

donde $\eta_n(t)$ se obtiene, en el caso de que no se impongan además condiciones iniciales, mediante la expresión:

$$\eta_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau \quad (3.148)$$

$$F_n(t) = \int_0^L Y(x) F(x, t) dx \quad (3.149)$$

donde $F(x, t)$ es la fuerza aplicada.

3.3.3.5.- Algunos casos particulares

Al igual que en la Sección 3.3.2.4, en este apartado se mostrarán soluciones analíticas para la barra apoyada en los dos extremos y para una barra con un extremo fijo y el otro con una carga másica puntual.

a.- Barra apoyada en los dos extremos

Las condiciones de contorno de esta barra, como se dijo anteriormente, consisten en que el desplazamiento y el momento son nulos en cada extremo.

$$y(0, t) = 0 \quad y(1, t) = 0 \quad M(0, t) = 0 \quad M(1, t) = 0 \quad (3.150)$$

Con ello, en esta barra se cumple que [3.5]:

$$\sin(a) \sinh(b) = 0 \quad \sin(a) \sin(\tilde{b}) = 0 \quad (3.151)$$

por lo que:

$$a_n = n\pi \quad \tilde{b}_n = n\pi \quad (3.152)$$

y los modos de vibración tienen la forma:

$$Y(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \sin(ax) \\ -a^2 + \omega^2 \beta \\ a \cos(ax) \end{array} \right\} \quad (3.153)$$

$$N = \int_0^1 Y M(Y) dx = \frac{\beta + \alpha \beta (-a^2 + \beta \omega^2) / a}{2} \quad (3.154)$$

Fuerza armónica

Al igual que en el modelo de Euler-Bernoulli, la fuerza armónica tiene ahora la forma:

$$F_{TS}(x_0,t)=A\delta(x-x_0)\text{sen}(\omega_i t) \quad (3.155)$$

donde A es la amplitud de la carga aplicada, x_0 el punto de aplicación y ω_i la frecuencia de la fuerza aplicada. La expresión analítica del desplazamiento transversal al aplicar la fuerza armónica, obtenida a través de las ecuaciones (3.146), (3.147) y (3.148) es:

$$y(x,t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{1n}}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] + \left(\frac{2}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{2n}}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] \right\} \quad (3.156)$$

$$R_{1n} = \frac{-a_n^2 + \omega_{1n}^2 \beta}{a_n} \quad R_{2n} = \frac{-\tilde{b}_n^2 + \omega_{2n}^2 \beta}{\tilde{b}_n} \quad (3.157)$$

$$\omega_{1n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)a_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 a_n^4 + 2(\alpha + \beta)a_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.158)$$

$$\omega_{2n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 \tilde{b}_n^4 + 2(\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.159)$$

Y las expresiones para el ángulo ψ , la fuerza transversal V y el momento M son:

$$\psi(x,t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{1n}}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] + \left(\frac{2R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{2n}}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] \right\} \quad (3.160)$$

$$V(x,t) = -A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0) \frac{(a_n + R_{1n})}{\omega_{1n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{1n}}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] + \left(\frac{2}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0) (\tilde{b}_n + \right.$$

$$+ R_{2n}) \frac{1}{\omega_{2n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{2n}}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] \quad (3.161)$$

$$M(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{a_n \text{sen}(a_n x) \cos(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{1n}}{\omega_i^2 - \omega_{1n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] + \left(\frac{2R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\tilde{b}_n \text{sen}(\tilde{b}_n x) \cos(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \left[\frac{\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_n t) - \frac{\omega_{2n}}{\omega_i^2 - \omega_{2n}^2} \text{sen}(\omega_i t) \right] \right\} \quad (3.162)$$

Fuerza tipo pulso cuadrado

Su expresión matemática es:

$$F_{TPc} = A \delta(x - x_0) p(t) \quad (3.163)$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases} \quad (3.164)$$

siendo A el valor de la fuerza, x_0 el punto de aplicación y t_1 el tiempo durante el cual se mantiene aplicada la fuerza sobre la barra.

Las expresiones para el desplazamiento y , ángulo ψ , fuerza transversal V y momento de torsión M son:

$$y(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{4}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}^2} [\text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{1n} t_1 / 2)] + \left(\frac{4}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}^2} [\text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{2n} t_1 / 2)] \right\} \quad (3.165)$$

$$\psi(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{4R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}^2} [\text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{1n} t_1 / 2)] + \right.$$

$$+ \left(\frac{4R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}^2} \left[\text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{2n} t_1 / 2) \right] \} \quad (3.166)$$

$$V(x, t) = -A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{4}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0) (a_n + R_{1n})}{\omega_{1n}^2} \left[\text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{1n} t_1 / 2) \right] + \left(\frac{4}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0) + (\tilde{b}_n + R_{2n}) \frac{1}{\omega_{2n}^2} \left[\text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{2n} t_1 / 2) \right] \right\} \quad (3.167)$$

$$M(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{4R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{a_n \text{sen}(a_n x) \cos(a_n x_0)}{\omega_{1n}^2} \left[\text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{1n} t_1 / 2) \right] + \left(\frac{4R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\tilde{b}_n \text{sen}(\tilde{b}_n x) \cos(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}^2} \left[\text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1 / 2)) \text{sen}(\omega_{2n} t_1 / 2) \right] \right\} \quad (3.168)$$

$$R_{1n} = \frac{-a_n^2 + \omega_{1n}^2 \beta}{a_n^2} \quad R_{2n} = \frac{-\tilde{b}_n^2 + \omega_{2n}^2 \beta}{\tilde{b}_n^2} \quad (3.169)$$

$$\omega_{1n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)a_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 a_n^4 + 2(\alpha + \beta)a_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.170)$$

$$\omega_{2n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 \tilde{b}_n^4 + 2(\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.171)$$

Fuerza tipo pulso gaussiano

La expresión matemática de esta fuerza es:

$$F_{TPg} = A \delta(x - x_0) g(t) \quad (3.172)$$

$$g(t) = \exp[-m^2(t - t_1)^2] \quad (3.173)$$

donde A es el valor de la fuerza aplicada y x_0 el punto de aplicación. Del mismo modo que en los modelos anteriores, la aproximamos por un impulso aplicado en t_1 :

$$F_{TPg} \cong A \sqrt{\pi} \delta(t - t_1) / m \quad (3.174)$$

Las expresiones para el desplazamiento y , angulo ψ , fuerza transversal V y momento de torsión M al aplicar esta fuerza son:

$$y(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1)) + \left(\frac{2}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\text{sen}(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1)) \right\} \quad (3.175)$$

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1)) + \left(\frac{2R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1)) \right\} \quad (3.176)$$

$$V(x, t) = \frac{-A}{\sqrt{\pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(a_n x) \text{sen}(a_n x_0) (a_n + R_{1n})}{\omega_{2n}} \text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1)) + \left(\frac{2}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\cos(\tilde{b}_n x) \text{sen}(\tilde{b}_n x_0) (\tilde{b}_n - R_{2n})}{\omega_{2n}} \text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1)) \right\} \quad (3.177)$$

$$M(x, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi m}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2R_{1n}}{\beta + R_{1n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{a_n \text{sen}(a_n x) \cos(a_n x_0)}{\omega_{1n}} \text{sen}(\omega_{1n} (t - t_1)) + \left(\frac{2R_{2n}}{\beta + R_{2n}^2 \alpha \beta} \right) \frac{\tilde{b}_n \text{sen}(\tilde{b}_n x) \cos(\tilde{b}_n x_0)}{\omega_{2n}} \text{sen}(\omega_{2n} (t - t_1)) \right\} \quad (3.178)$$

$$R_{1n} = \frac{-a_n^2 + \omega_{1n}^2 \beta}{a_n} \quad R_{2n} = \frac{-\tilde{b}_n^2 + \omega_{2n}^2 \beta}{\tilde{b}_n} \quad (3.179)$$

$$\omega_{1n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)a_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 a_n^4 + 2(\alpha + \beta)a_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.180)$$

$$\omega_{2n} = \sqrt{\frac{(1 + (\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2 - \sqrt{1 - (\alpha - \beta)^2 \tilde{b}_n^4 + 2(\alpha + \beta)\tilde{b}_n^2})}{2\alpha\beta}} \quad (3.181)$$

b.-Barra con un extremo amordazado y el otro con carga másica

Como se vio anteriormente, la condición de contorno de extremo amordazado implica que ese extremo se encuentra fijo de tal forma que el desplazamiento y su primera derivada son nulos:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ \psi(0, t) = 0 \end{cases} \quad (3.182)$$

mientras que la condición de carga másica puntual hace que el momento de torsión en ese extremo sea nulo, y que la fuerza transversal en el extremo dependa de la aceleración del mismo:

$$\begin{cases} M(1, t) = 0 \\ V(1, t) = m \frac{\partial^2 y(1, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.183)$$

donde m es la masa adimensional de la carga másica:

$$m = \frac{\text{carga másica}}{\text{masa de la barra}} \quad (3.184)$$

Del mismo modo que ocurría en las vibraciones longitudinales y en el modelo de Euler-Bernoulli, al tener una carga másica en un extremo, los modos de vibración no son ortogonales, por lo que no es posible obtener una solución analítica del movimiento vibratorio transversal de la barra. Por tanto, de nuevo encontramos que la única información teórica que puede obtenerse en este caso son las frecuencias naturales de vibración, las cuales se calculan resolviendo las siguientes ecuaciones trascendentes, deducidas a partir de la aplicación de las condiciones de contorno (3.182) y (3.183) a (3.130) y (3.132):

- Para $\omega < 1/(\alpha\beta)^{1/2}$

$$\begin{aligned} & (a - R_1)(\cos(a) + B\sin(a)) - (b - R_2) \left(\frac{a}{b} \cosh(b) + B\sinh(b) \right) - \\ & - m\omega^2 \left[\sin(a) - B\cos(a) - \frac{a}{b} \sinh(b) + B\cosh(b) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$a = \sqrt{\omega^2(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.186)$$

$$b = \sqrt{-\omega^2(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.187)$$

$$R_1 = \frac{-a^2 + \omega^2\beta}{a} \quad R_2 = \frac{-b^2 + \omega^2\beta}{b} \quad (3.188)$$

$$B = \frac{aR_1 \text{sen}(a) + aR_2 \text{senh}(b)}{aR_1 \cos(a) + bR_2 \cosh(b)} \quad (3.189)$$

- Para $\omega > 1/(\alpha\beta)^{1/2}$

$$(a - \tilde{R}_1)(\cos(a) - \tilde{B} \text{sen}(a)) + (\tilde{b} - \tilde{R}_2) \left(\tilde{B} \text{sen}(\tilde{b}) - \frac{a}{\tilde{b}} \cos(\tilde{b}) \right) -$$

$$- m\omega^2 \left[\text{sen}(a) + \tilde{B} \cos(a) - \frac{a}{\tilde{b}} \text{sen}(\tilde{b}) - \tilde{B} \cos(\tilde{b}) \right] = 0 \quad (3.190)$$

$$a = \sqrt{\omega^2(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.191)$$

$$\tilde{b} = \sqrt{\omega^2(\alpha + \beta)/2 - \sqrt{\omega^4(\alpha - \beta)^2/4 + \omega^2}} \quad (3.192)$$

$$\tilde{R}_1 = \frac{a^2 - \omega^2\beta}{a} \quad \tilde{R}_2 = \frac{\tilde{b}^2 + \omega^2\beta}{\tilde{b}} \quad (3.193)$$

$$\tilde{B} = \frac{-a\tilde{R}_1 \text{sen}(a) + a\tilde{R}_2 \text{sen}(\tilde{b})}{a\tilde{R}_1 \cos(a) + \tilde{b}\tilde{R}_2 \cos(\tilde{b})} \quad (3.194)$$

REFERENCIAS

- [3.1] S.P. Timoshenko “History of strength of materials”. Dover Publications, New York (1953).
- [3.2] K.F. Graff “Wave Motion in Elastic Solids”. Dover Publications, New York (1991).
- [3.3] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V. Sanders “Fundamentos de Acústica”. Editorial Limusa, México (1995).
- [3.4] R. Kohoutek “Natural longitudinal frequencies of a uniform rod with a tip mass or a spring”. *Journal of Sound and Vibration*, 77, pp. 147-148 (1980).
- [3.5] S.H. Han, H. Benaroya, T. Wei “Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories”. *Journal of Sound and Vibration*, 225 (5), pp. 935-988 (1999).
- [3.6] P. Laura, J.L. Pombo and E.A. Susemihl “Note on vibrations of a clamped-free beam with a tip mass at free end”. *Journal of Sound and Vibration*, 37 (2), pp. 161-168 (1974).
- [3.7] S. Ekwaro-Osire, D.H.S. Maithripala, J.M. Berg “A series expansion approach to interpreting the spectra of the Timoshenko beam”. *Journal of Sound and Vibration*, 240, pp. 667-678 (2001).

CAPITULO 4

LA TRANSFORMADA WAVELET

4.1.- Introducción

Uno de los requisitos más importantes para el mantenimiento de una estructura es la detección de daños por fractura en sus primeros estadios de crecimiento. El análisis y control de la salud de estructuras se ha estudiado extensamente a lo largo de las últimas décadas, habiéndose incrementado considerablemente el énfasis en la valoración del daño *in situ* y de forma no destructiva. Son numerosos los sistemas civiles, mecánicos y aeroespaciales que siguen en servicio después de muchos años, con lo que esto puede significar en acumulación de daños. El estado actual de infraestructuras antiguas y la economía asociada a sus reparaciones, también son factores que han motivado el desarrollo de métodos eficaces que puedan detectar los posibles deterioros.

Actualmente existe una amplia variedad de herramientas de alta efectividad para la evaluación no destructiva. No obstante, la identificación de daños basada en los cambios de las características vibratorias es uno de los pocos métodos que controlan

cambios en la estructura de forma global [4.1]. Los métodos actuales de detección de daño son, o bien visuales, o bien métodos experimentales localizados, tales como los métodos acústicos o de ultrasonidos, de campo magnético, radiografía y de campos térmicos [4.2]. La mayoría de estos métodos requieren un conocimiento previo de la localización del daño, la instalación de sensores apropiados, así como el uso de eficientes acondicionadores de señal. La ventaja del control del daño basado en la vibración es la capacidad de valorarlo globalmente, lo que resulta muy útil cuando el sistema en cuestión es una estructura compleja, como un puente, un edificio, o el fuselaje de un avión. La desventaja es que la presencia de pequeñas fracturas puede no ser evidente en los cambios de las frecuencias naturales bajas de la estructura o de sus modos de vibración, que son las propiedades dinámicas medidas en los casos reales. Esto conduce a la necesidad de desarrollar técnicas alternativas de análisis de los datos recogidos, como es el caso del análisis wavelet, una herramienta poderosa para alcanzar tales objetivos.

De forma general, el daño puede definirse como un cambio producido en el sistema que afecta adversamente a su funcionamiento actual o futuro. La premisa básica para la detección de daño basada en vibraciones es que este alterará significativamente las propiedades de rigidez, masa o energía de un sistema que, como consecuencia, alterará su respuesta dinámica [4.1]. Justamente en esta premisa se basa el análisis wavelet. Aunque los cambios o perturbaciones ocasionados por los daños pueden no ser evidentes mediante un examen de la respuesta total medida, a menudo son detectables por sus componentes wavelets [4.3].

La idea principal del análisis wavelet es descomponer la señal dinámica de la respuesta estructural en el dominio espacial o temporal en series locales de diferentes funciones base de las que extraer la información sobre el daño.

Resumimos a continuación las ventajas fundamentales del análisis wavelet sobre otras técnicas existentes [4.4]:

- ✓ La habilidad para realizar un análisis local de la señal en el dominio del espacio o del tiempo.

- ✓ La posibilidad de estudiar con detalle cualquier intervalo de espacio o de tiempo en el que la respuesta cambie rápidamente.
- ✓ Eliminar de forma inherente los problemas de *aliasing*.
- ✓ Ofrecer una reducción de los recursos computacionales necesarios para realizar la transformación de una señal.

4.2.- Los orígenes

Desde un punto de vista histórico, el análisis wavelet es un método nuevo, aunque sus fundamentos matemáticos se remontan a los trabajos de Joseph Fourier en el siglo XIX. Fourier estableció las bases a través de sus teorías del análisis en frecuencia, que han probado ser de gran importancia e influencia. Pero la atención de los investigadores, poco a poco, fue cambiando desde el análisis basado en la frecuencia hacia el análisis basado en las escalas, ya que comenzó a observarse que una aproximación basada en promedios de fluctuaciones a diferentes escalas podía ser menos sensible al ruido [4.5].

La existencia de wavelets vistas como funciones se conoce desde la primera parte del siglo XX. La primera mención registrada del término wavelet es de 1909 en la tesis de Alfred Haar [4.6]. Pero el concepto de wavelets en su forma teórica tal y como lo conocemos actualmente fue propuesto por primera vez por Jean Morlet y el equipo del Centro Marsellés de Física Teórica, que trabajaba bajo la dirección de Alex Grossmann.

Los métodos de análisis wavelet se han desarrollado fundamentalmente por Yves Meyer y sus colegas, que se han ocupado también de su divulgación. El algoritmo más popular procede del trabajo de Stephane Mallat en 1988. Desde entonces, la investigación en wavelets se ha hecho internacional, siendo particularmente activa en Estados Unidos, donde se ha extendido su uso debido a los trabajos de I. Daubechies, R. Coifman y V. Wickerhauser. Podemos encontrar una revisión bibliográfica muy buena de la teoría de wavelets en el libro “Wavelets: Algorithms and Applications” de Meyer [4.7].

Nos parece interesante señalar, antes de dar por concluida esta breve introducción histórica, que la aparición de esta nueva técnica de análisis de señales, tuvo más contribuciones de las arriba indicadas pues, como muchos de los descubrimientos y avances en nuevas técnicas, algunos de los resultados básicos en los que se apoyan se han obtenido con anterioridad a su reconocimiento.

De estas contribuciones destacamos el análisis de Littlewood-Paley (1930) que subyace en los trabajos de Mallat sobre procesamiento de imágenes, la identidad de Calderón (1960) que fue redescubierta por Grossmann y Morlet veinte años después, y los trabajos de J.O. Stromberg, que fue el primero en construir una base wavelet ortonormal, bien localizada, y que tiene la estructura algorítmica de un sistema Haar, más tarde utilizada por Meyer.

Las wavelets se han aplicado en numerosas áreas, incluyendo la compresión de datos, procesamiento de imágenes y estimación espectral tiempo-frecuencia. Son numerosas las herramientas para el análisis tiempo-frecuencia de señales discretas: la Transformada de Fourier (TF) y la Transformada de Fourier modificada para tiempos cortos (STFT), especialmente. Estudiando las limitaciones de estos métodos, podemos ver las ventajas de la Transformada Wavelet (TW), usada en este trabajo.

4.2.1.- Transformada de Fourier (TF)

En el análisis de señales la herramienta más universal es la Transformada de Fourier. La TF y su inversa están definidas para una señal $f(t)$ como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (4.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4.2)$$

Puede verse que $F(\omega)$ es una función que describe la contribución del seno y el coseno a la señal original en el dominio del tiempo. La Figura 4.1 muestra la TF de una señal suma de dos señales seno de diferente frecuencia.

Las funciones base seno y coseno se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en el tiempo, es decir, tienen soporte infinito en el tiempo. Por otra parte, la TF tiene soporte aproximadamente cero en el dominio de la frecuencia. En otras palabras, los resultados serán locales en la frecuencia pero globales en el tiempo, ya que las funciones base se extienden completamente a lo largo del eje temporal. La contribución de estas señales básicas está limitada en el tiempo solo por la duración de la señal a analizar, $f(t)$. Para la mayoría de las señales el análisis de Fourier es extremadamente útil ya que el contenido en frecuencia de la señal es de gran importancia. Sin embargo, la TF tiene una seria desventaja. Al transformar al dominio de la frecuencia, la información temporal se pierde completamente, con lo que es imposible conocer a partir de ella cuándo suceden ciertos eventos. Generalmente, esto no es un problema para señales estacionarias donde suceden cambios pequeños a lo largo del tiempo. Sin embargo, muchas señales de interés contienen numerosas características transitorias o no estacionarias tales como tendencias, agrupamientos, cambios bruscos y discontinuidades. Cuando analizamos las señales no estacionarias, donde las frecuencias características cambian con el tiempo, los resultados de la TF pueden no ser significativos ya que no reproducen la variación temporal de la frecuencia contenida en la señal. En estos casos es necesario utilizar una transformada en la que su función base permita transformar la señal en una representación que una los dominios del tiempo y la frecuencia.

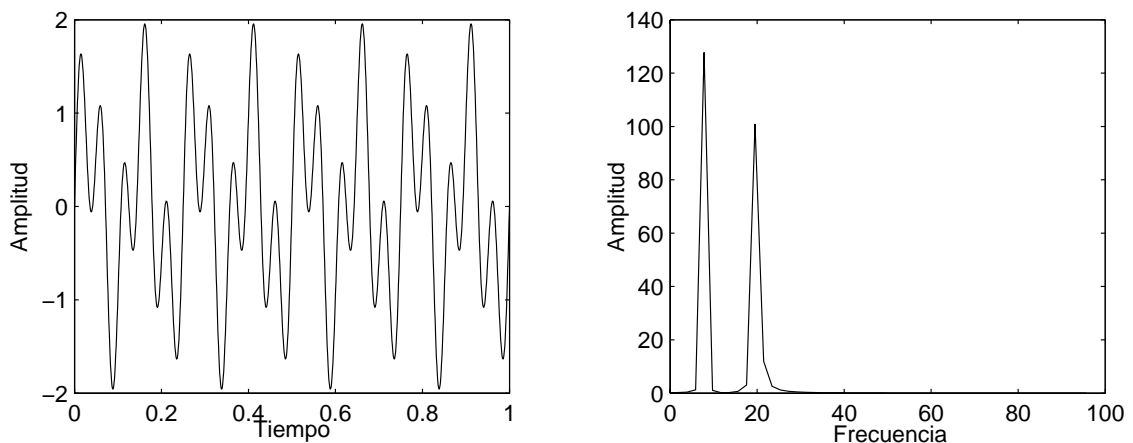


Figura 4.1. Ejemplo de una señal (izquierda) y su TF (derecha).

4.2.2.- Transformada de Fourier en tiempos cortos (STFT)

Esta herramienta matemática se desarrolló fundamentalmente para corregir la deficiencia de la TF cuando se trabaja con señales no estacionarias. Se basa en usar la técnica de ventaneado variable, es decir, modificando la TF para que analice solo una pequeña porción de la señal en el tiempo. La STFT de una señal $f(t)$ fue definida por Gabor en 1946 como [4.5]:

$$\text{STFT}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt \quad (4.3)$$

donde $g(t)$ es una función gaussiana:

$$g(t) = \exp(-t/a)^2 \quad (4.4)$$

siendo a una constante que define el espesor de la ventana usada. Esto permite reescribir la ecuación (4.3) como:

$$\text{STFT}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \exp\left[-\left(\frac{t - \tau}{a}\right)^2\right] dt \quad (4.5)$$

Esta expresión da la TF de la función $f(t)$ ventaneada por $g(t)$, centrada en τ , que modificada continuamente para trasladarse a distintos valores de τ , nos permite obtener una descripción temporal del contenido en frecuencia de la señal.

Una de las características más importantes de la STFT es el hecho de que el ancho de la ventana permanece constante durante todo el proceso de análisis. Esto es una limitación cuando se necesita una alta resolución para identificar cambios repentinos de la señal en el tiempo.

Aunque la utilización de estas funciones de ventaneado introduce el análisis tiempo-frecuencia, afecta, en cierta forma, a la resolución en el dominio de la frecuencia. Este fenómeno se conoce como principio de incertidumbre y su impacto en los resultados de la transformada puede recogerse en lo siguiente:

Cualquier función de ventaneado definida en el dominio del tiempo tendrá cierta duración Δt definida como [4.8]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}} \quad (4.6)$$

De igual forma, esta función tendrá una duración $\Delta \omega$ en el dominio de la frecuencia, definida como:

$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}} \quad (4.7)$$

donde $G(\omega)$ es la TF de $g(t)$.

El resultado $\Delta t \Delta \omega$ es un valor constante, que significa que una variación en el ancho de la ventana en el dominio del tiempo influirá drásticamente en el dominio de la frecuencia [4.9].

La STFT representa un tipo de compromiso entre los puntos de vista basados en la frecuencia y el tiempo. Nos da alguna información sobre cuándo y a qué frecuencias suceden los eventos de la señal. Sin embargo, esta información se obtiene con una precisión limitada, que viene determinada por el tamaño de la ventana temporal elegido. El análisis de muchas señales requiere una aproximación más flexible, como puede ser una ventana de tamaño variable, para obtener más información y exactitud sobre el tiempo y/o la frecuencia de un evento concreto.

Esto sirve como preludeo de la Transformada Wavelet.

4.3.-Transformada Wavelet

El análisis wavelet significa el siguiente paso lógico: una técnica de ventaneado con regiones de ancho variable. El análisis wavelet permite usar grandes intervalos de

tiempo para la información de bajas frecuencias y cortos intervalos para la información de altas frecuencias. Una de sus mayores ventajas es la habilidad de realizar un análisis local de la señal. Consideremos, por ejemplo, una señal senoidal con una pequeña discontinuidad inapreciable a simple vista (véase la Figura 4.2). Esta señal se genera fácilmente en el mundo real por una fluctuación de potencia o un ruido. La TF de esta señal muestra la componente de baja frecuencia de la señal original, pero falla en la detección de la pequeña discontinuidad [4.10]. La TW de esta señal, como se ve en la Figura 4.2, muestra la localización exacta en el tiempo de esta discontinuidad.

El análisis wavelet es, por tanto, capaz de revelar aspectos de los datos que otras técnicas de análisis de señal pierden, tales como tendencias, puntos de rotura, discontinuidades en derivadas superiores, auto-similitudes, etc. En su breve historia dentro del campo de procesamiento de señales ha probado ser una herramienta extraordinariamente poderosa.

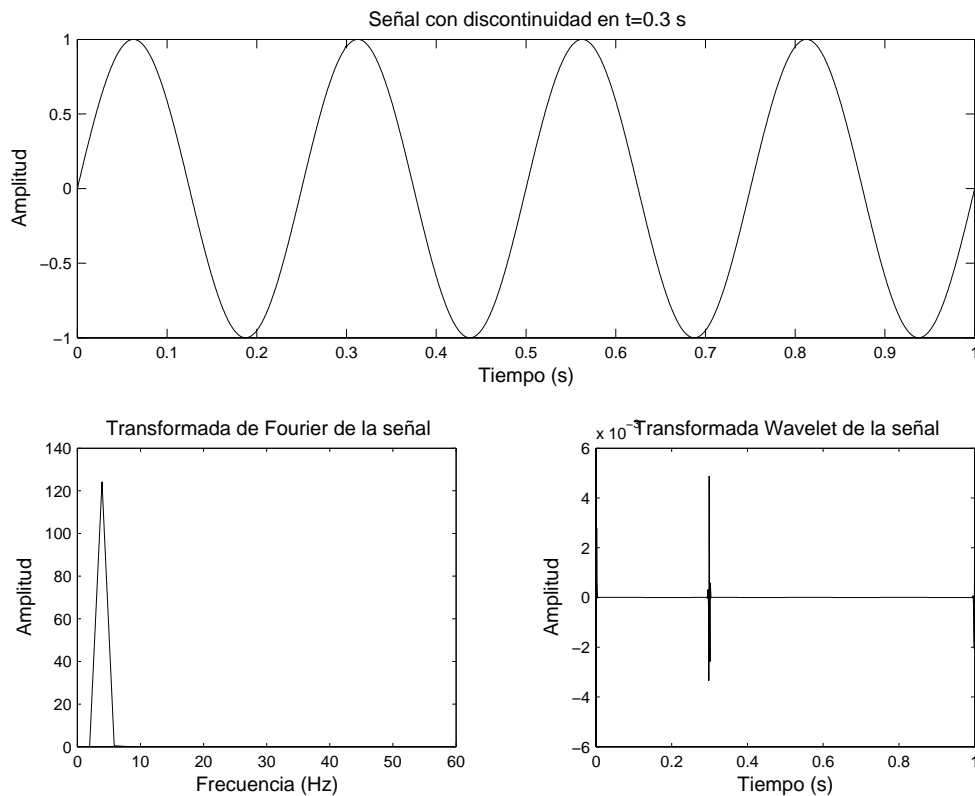


Figura 4.2. Señal senoidal con una pequeña discontinuidad en $t=0.3$ s y sus Transformadas de Fourier y Wavelet.

4.3.1.- Transformada Wavelet Continua (CWT)

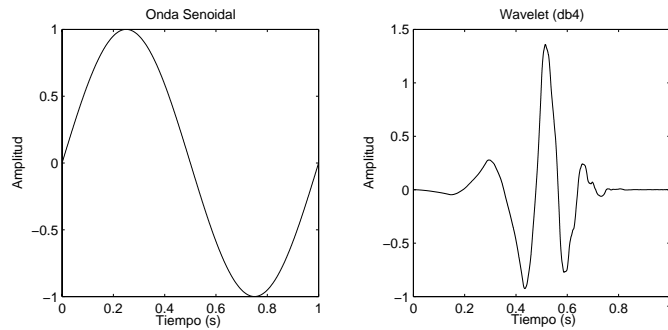


Figura 4.3. Comparación entre una onda senoidal y la función wavelet Daubechies 4.

Una wavelet es una onda de duración efectiva limitada que tiene valor medio cero. Esto se describe a menudo como un soporte temporal compacto. Las ondas senoidales, funciones base de la TF, se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y tienen un soporte infinito, como comentamos anteriormente. Las ondas seno y coseno son suaves y predecibles, mientras que las wavelets tienden a ser irregulares y asimétricas. En la Figura 4.3 se muestra la comparación entre una onda senoidal y una wavelet. El análisis de Fourier consiste en descomponer una señal en senos de varias frecuencias y fases. De manera similar, el análisis wavelet descompone una señal en wavelets desplazadas y escaladas de la wavelet original o madre (véase la Figura 4.4).

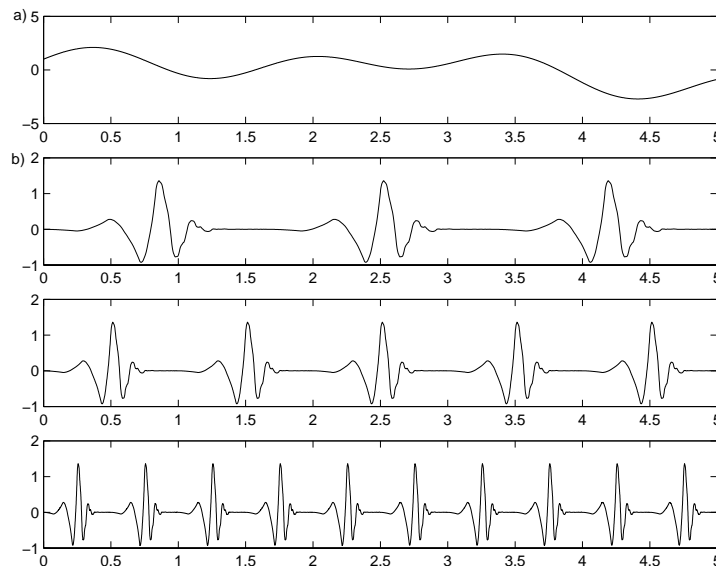


Figura 4.4. a) Señal a analizar. b) Distintas funciones, formadas por la wavelet Daubechies 4 desplazada y escalada, que se integrarán con la señal para realizar la CWT.

La Transformada Wavelet Continua (CWT) de una función $f(t)$ se define como

$$W(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (4.8)$$

donde $a > 0$ y $b \in \mathfrak{R}$, son los parámetros de dilatación y traslación, respectivamente. La función $\psi(t)$ se llama wavelet madre y la barra indica el complejo conjugado. La wavelet madre debe satisfacer la condición de admisibilidad:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4.9)$$

donde $\Psi(\omega)$ es la TF de $\psi(t)$. Así, el desarrollo wavelet de $f(t)$ se define por la siguiente ecuación:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} da db \quad (4.10)$$

El aspecto más destacado de la TW es que la función base ψ no es única. No obstante, debe estar definida de acuerdo con un conjunto de reglas y condiciones. Esta es la gran diferencia con las funciones base seno y coseno en las Transformadas de Fourier y Gabor. Como veremos después, las funciones base en CWT no necesitan tener una forma analítica cerrada. Pueden definirse iterativamente como en el caso de la familia de wavelets de Daubechies.

Lo que hace diferente la CWT de la STFT no es solo que la función base no está definida de forma única, sino también que la ventana usada se traslada a lo largo del eje temporal y se escala. Así, el parámetro b , que nos indica dónde está centrada la ventana, no es un parámetro fijo, sino que se puede hacer variar para trasladar la ventana y realizar la CWT en distintas partes de la función. Del mismo modo, el parámetro a , conocido como *escala*, no permanece constante como en el caso de la STFT, sino que varía, permitiendo la expansión o contracción de la ventana. De esta forma, $W(a, b)$ es un coeficiente que nos da información sobre la función $f(t)$ en $t=b$, información que depende de la escala a escogida. En general, se representa la $W(a, b)$ con b variable y a fijo, de forma que se puede ver cómo varía la CWT a lo largo del tiempo y comparar los valores que tiene en los diferentes instantes. Otra opción, que permite un análisis más

detallado, es representar $W(a,b)$ en función de a y b , mediante una figura en tres dimensiones, para ver los cambios que se producen en función del tiempo y de la escala.

Una muestra del efecto de la escala en la CWT se representa en la Figura 4.5. Para escala 1 tenemos recogida la información de alta frecuencia de la señal analizada, sin que se pueda deducir nada sobre el contenido de baja frecuencia, mientras que para escala 2000 tenemos la información sobre la variación a baja frecuencia de la señal, pero el contenido de alta frecuencia ha desaparecido.

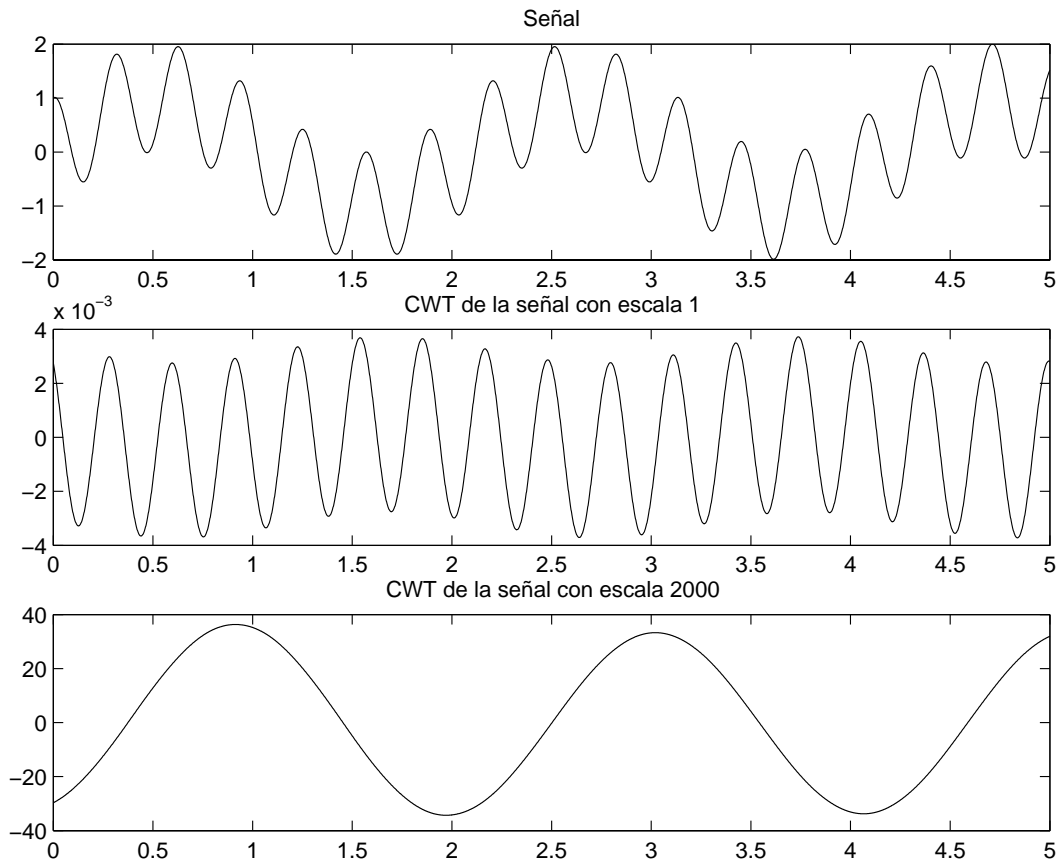


Figura 4.5. CWT a escala 1 y 2000 de la señal $f = \text{sen}(2t) + \text{cos}(20t)$.

Puesto que la CWT parte de la idea de una representación tiempo-frecuencia debido a la dependencia del valor de escala a , se puede establecer una relación directa entre el parámetro de escala y la frecuencia a la que está centrada la ventana. Por ejemplo, tomemos la wavelet de Morlet, definida como

$$\psi(t) = \exp(i\omega_0 t) \exp\left(-|t|^2 / 2\right) \quad (4.11)$$

donde ω_0 se elige como 1.7511 para satisfacer la condición de admisibilidad [4.11]. De la ecuación (4.8) obtenemos que

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi a} \quad (4.12)$$

siendo f la frecuencia en la que está centrada la ventana en el dominio de la frecuencia para un valor dado de escala a . En esta expresión vemos que a mayor escala, menor frecuencia, y viceversa.

4.3.2.- Transformada Wavelet Discreta (DWT)

La TW definida en (4.8) es la expresión de la Transformada Wavelet Continua. Una formulación más práctica para los propósitos de análisis de señales fue introducida por Daubechies, que permite la discretización de los parámetros de escala a y traslación b . Esta formulación, conocida como Transformada Wavelet Discreta, puede expresarse como

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{j,k}(t) dt = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle \quad (4.13)$$

donde $\alpha_{j,k}$ es el coeficiente de desarrollo wavelet de $f(t)$ y $\psi_{j,k}$ es la base discreta generada por dilatación y traslación de la wavelet madre ψ . Ahora los enteros j y k , pertenecientes a Z , son los parámetros de dilatación y traslación, respectivamente. Esto conduce a que el análisis sea más eficiente y exacto si se emplean escalas y posiciones diádicas, es decir, en base 2. Para algunas elecciones especiales de ψ , las wavelets discretizadas $\psi_{j,k}$ constituyen una base ortonormal de $L^2(\mathfrak{R})$. Usando bases ortonormales, el desarrollo wavelet de una función $f(t)$ y los coeficientes wavelet del desarrollo están definidos como

$$f(t) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (4.14)$$

La wavelet discreta puede escribirse como

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (4.15)$$

Realmente, cualquier procesamiento de señal en un ordenador debe realizarse en formato discreto. Incluso la CWT usa técnicas de procesamiento discreto de datos y la única diferencia con respecto a la DWT es la escala en la que opera. A diferencia de la DWT, la CWT puede operar a cualquier escala, desde aquella en la que aparece la señal original hasta una escala máxima determinada por el usuario.

4.3.3.- Transformada Wavelet rápida (FWT)

El avance en el análisis wavelet viene de 1988 cuando Mallat desarrolló un algoritmo eficiente usando filtros, que es el equivalente de la TF rápida, a veces referida como Transformada Wavelet rápida: una “caja” por la que pasa una señal y de la que salen los coeficientes wavelets [4.12].

El algoritmo de Mallat es, de hecho, un esquema clásico conocido en el procesamiento de señales como codificador de subbanda de dos canales. El libro de Strang y Nguyen “Wavelets and filter banks” [4.13] contiene una excelente discusión sobre este tema. El esquema está basado en el concepto de análisis de multirresolución y filtros en cuadratura de espejo, que tiene una teoría bien establecida en el procesamiento de señales. Este avance en la teoría ha permitido un gran aumento en la aplicación del análisis wavelet a muchos campos de la ingeniería.

4.3.3.1.- Descomposición wavelet

Básicamente, la FWT descompone una señal en un conjunto de aproximaciones y detalles usando los filtros apropiados que están relacionados con las funciones wavelet madre. Los detalles contienen la información a escala baja o el contenido de alta frecuencia de la señal, mientras que las aproximaciones corresponden a frecuencias bajas, de alta escala. Para algunas señales el contenido de baja frecuencia es la parte más importante, lo que le da a la señal su identidad. Por otra parte, el contenido en alta frecuencia muestra los detalles de la señal, contiene ruido y posiblemente información sobre discontinuidades. Seleccionando escalas diádicas diferentes, una wavelet puede jugar el papel tanto de un filtro paso alta como paso baja, con el fin de generar aproximaciones y detalles de la señal original.

Para obtener los coeficientes de aproximación, que se denotan como cA , es necesario realizar dos operaciones distintas: se aplica un filtro paso baja a la señal, denominado L , y al resultado obtenido se le aplica el proceso denominado “downsampling”, que consiste en la selección de uno de cada dos datos, por lo que se reduce a la mitad el número de coeficientes. Los coeficientes de detalle, cD , se obtienen de la misma forma, salvo por el hecho de que se aplica un filtro paso alta, llamado H , en lugar de uno paso baja. El “downsampling” impide que al final del proceso tengamos el doble de valores de los que tenía la señal, lo que sería algo poco eficiente. Como hemos comentado anteriormente, los coeficientes de aproximación contienen información sobre la evolución general de la señal y sobre su comportamiento a gran escala, mientras que los coeficientes de detalle muestran el contenido de alta frecuencia.

Este proceso de descomposición no tiene por qué limitarse a un solo paso, sino que puede realizarse de forma iterativa para aumentar el nivel de claridad en los coeficientes de aproximación que se quieren obtener. Así, es posible descomponer los coeficientes de aproximación cA_1 en otros dos grupos de coeficientes cA_2 y cD_2 , y, a su vez, cA_2 puede descomponerse en cA_3 y cD_3 , obteniéndose lo que se denomina árbol de descomposición wavelet, o descomposición multinivel (véase la Figura 4.6).

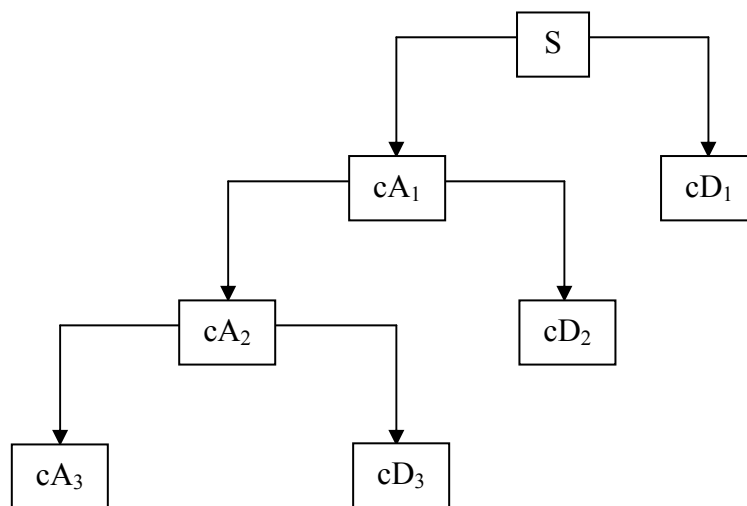


Figura 4.6. Esquema de un árbol de descomposición wavelet hasta nivel 3.

4.3.3.2.- Reconstrucción wavelet

Del mismo modo que a partir de la FWT se puede descomponer la señal en sus coeficientes de aproximación y de detalle, es posible realizar el proceso inverso para reconstruir la señal original a partir de cA y cD . Así, el primer paso consistiría en realizar la operación opuesta al “downsampling”, el “upsampling”, que es un proceso que consiste en el aumento de los valores de una señal mediante la inclusión de ceros entre cada valor de la misma. Una vez realizado esto, se le aplica un filtro de reconstrucción, H' o L' según se trate de cD o cA , relacionado con el filtro de descomposición aplicado anteriormente.

4.3.4.- Wavelets y filtros

En realidad, la elección de los filtros determina la forma de la wavelet usada para llevar a cabo la DWT. De hecho, después del trabajo de Daubechies, raramente comenzamos con la forma de la wavelet, sino que primero se diseñan los filtros apropiados y después se usan para crear la onda. Una de las wavelets más usadas en investigación es la familia de wavelets ortonormales de Daubechies, las cuales se crean iterativamente y no tienen forma analítica. En general, la wavelet está determinada por el filtro paso alta H , que también produce los detalles de la descomposición en wavelets. Hay una función adicional asociada con algunas wavelets llamada función de escalado Φ , similar a la wavelet y determinada por el filtro paso baja (está asociada con la aproximación en la descomposición wavelet). En general, las funciones de escalado y wavelet se obtienen iterativamente a través de las siguientes expresiones

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \Phi(2t - n) \quad (4.16)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \Phi(2t - n) \quad (4.17)$$

donde h_n es la respuesta impulso del filtro paso baja L y g_n la respuesta impulsiva del filtro paso alta H , que están relacionadas entre sí por la expresión

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} \quad (4.18)$$

Además de la ecuación (4.18), la perfecta reconstrucción y descomposición ortogonal significa que debe cumplirse que

$$\sum_n h_n h_{n-2k} = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

4.3.5.- Descomposición Wavelet Ortogonal (OWD)

Una de las ventajas de DWT es la habilidad para crear una base ortogonal wavelet basada en cambios y escalas correspondientes a la escala diádica. Esto se refleja en los filtros de descomposición y reconstrucción. Recordemos (4.13)

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{j,k}}(t) dt = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle$$

El detalle en el nivel j está definido como

$$D_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \psi_{j,k} \quad (4.20)$$

y la aproximación al nivel J como

$$A_J = \sum_{j > J} D_j \quad (4.21)$$

de donde

$$A_{J-1} = A_J + D_J \quad (4.22)$$

$$f(t) = A_J + \sum_{j \leq J} D_j \quad (4.23)$$

Las ecuaciones (4.22) y (4.23) nos dan una estructura de árbol de la señal y también un procedimiento de reconstrucción de la señal original. Seleccionando escalas diádicas diferentes, una señal puede descomponerse en numerosas componentes de baja resolución, referidas al árbol de descomposición wavelet.

4.3.6.- Regularidad y momentos nulos

Como hemos dicho, las wavelets son, en general, ondas irregulares y asimétricas, de duración temporal limitada con promedio temporal cero. Por definición, una wavelet ψ tiene N momentos nulos si

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0 \quad 0 \leq p \leq N - 1 \quad (4.24)$$

Por lo tanto, si el valor promedio de una wavelet es cero ($p=0$), entonces la wavelet tiene al menos un momento nulo. Supongamos ahora que una wavelet tiene N momentos nulos, entonces el resultado de cualquier CWT de cualquier polinomio $f(t)$ de grado $N-1$ debe ser cero. Esto significa que todos los coeficientes $C(b,a)$ son nulos para cualquier escala a y cambio b . El análisis wavelet suprime cualquier polinomio de grado p si tiene $p+1$ momentos nulos. Lo peculiar de este resultado es que si una señal $f(t)$ contiene un polinomio en el intervalo temporal $[\alpha, \beta]$, los coeficientes de la descomposición wavelet $C(b,a)$ serán cero siempre que la wavelet madre esté incluida en $[\alpha, \beta]$.

La regularidad está muy relacionada con el número de momentos nulos de las wavelets típicas. En general, la regularidad o suavidad se incrementa cuando crece el número de momentos nulos. Denotaremos la clase de regularidad de una wavelet dada por C^α donde α denota cuántas veces es diferenciable continuamente la wavelet.

4.3.7.- Detección de singularidades

La característica más importante de la TW que hemos usado en esta Memoria es su capacidad para mostrar los detalles de las señales analizadas. El uso de distintas escalas permite ampliar los detalles de la señal y detectar singularidades e irregularidades que, de otra forma, pasarían desapercibidas.

Para comprender la detección de las singularidades mediante la TW, consideremos una función f que es m veces diferenciable en el intervalo $[v-h, v+h]$. Si p_v es el polinomio de Taylor en v

$$p_v = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(v)}{k!} (t-v)^k \quad (4.24)$$

el teorema de Taylor prueba que el error de aproximación

$$\varepsilon_v(t) = f(t) - p_v(t) \quad (4.25)$$

cumple que

$$\forall t \in [v-h, v+h], \quad |\varepsilon_v(t)| \leq \frac{|t-v|^m}{m!} \sup_{u \in [v-h, v+h]} |f^{(m)}(u)| \quad (4.26)$$

El número de veces m que es diferenciable la función f da una cota superior al error de ε_v cuanto t tiende a v . Otra forma de acotar este error de aproximación es mediante el exponente Lipschitz α , el cual, a diferencia de m , no tiene por qué ser entero. Para introducir este exponente consideramos la definición de una función Lipschitz:

- Una función f es Lipschitz a trozos de exponente $\alpha \geq 0$ si existe una constante $K > 0$ y un polinomio p_v de grado m tal que

$$\forall t \in \mathfrak{R}, \quad |f(t) - p_v(t)| \leq K|t-v|^\alpha \quad (4.27)$$

- Una función f es uniformemente Lipschitz con exponente $\alpha \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$ si se cumple la condición (4.27) para todo $v \in [a, b]$, con una constante K que es independiente de v .

En funciones uniformemente Lipschitz, sus exponentes α son una medida de su regularidad. Si f es uniformemente Lipschitz $\alpha > m$ en un intervalo, f es m veces diferenciable en ese intervalo, por lo que no tendrá ningún tipo de singularidad. El siguiente teorema, debido a Hwang y Mallat [4.15], muestra cuándo se puede asegurar que una función es uniformemente Lipschitz:

- Supongamos que la función wavelet ψ pertenece a C^n con soporte compacto, y se cumple que $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ con $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt \neq 0$. Sea $f \in L^1[a, b]$, si existe $s_0 > 0$ tal que

$|W(u, s)|$ no tiene un máximo local para $u \in [a, b]$ y $s < s_0$, entonces f es uniformemente Lipschitz con exponente n en $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, para cualquier $\varepsilon > 0$.

Se puede demostrar, que la condición $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$ se cumple si la función wavelet ψ tiene n momentos nulos [4.15]. Este teorema muestra que si la TW de una función no tiene un máximo local, esta función no tiene ningún tipo de singularidad o de irregularidad, y, por tanto, las singularidades se encontrarán donde haya un máximo local de $|W(u, s)|$.

Cuanto mayor sea el número de momentos nulos n de la función wavelet, mayor será la sensibilidad a la hora de detectar singularidades mediante esta técnica, ya que si la singularidad se haya en una derivada de orden m superior a n , no aparecerá ningún máximo local en la transformada. Además, dado que $\psi = (-1)^n \theta^{(n)}$, la TW se puede escribir como:

$$W(u, s) = s^n \frac{d^n}{du^n} (f * \bar{\theta}_s)(u) \quad (4.28)$$

$$\bar{\theta}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \theta\left(-\frac{t}{s}\right) \quad (4.29)$$

donde $*$ denota convolución. Luego la TW es proporcional a la derivada n -ésima de la convolución $f * \bar{\theta}_s$, por lo que cuanto mayor sea n (el orden de la derivada), más destacarán los máximos locales de $|W(u, s)|$.

4.3.8.- Familias de wavelets

Dedicamos este último apartado a hacer una breve mención de algunas familias de wavelets especialmente útiles.

Haar: Cualquier discusión sobre wavelets comienza con la wavelet Haar, por ser históricamente la primera y más simple. La wavelet Haar es discontinua y parece una función paso.

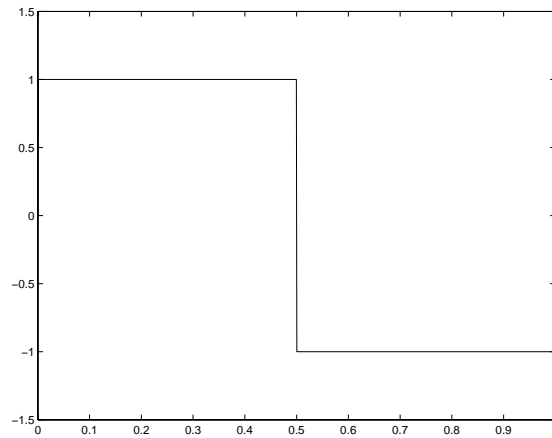


Figura 4.7. Representación de la función wavelet Haar.

Daubechies: Ingrid Daubechies, una de las investigadoras más brillantes en el campo de las wavelets, inventó las llamadas wavelets ortonormales soportadas compactamente, que hacen posible el análisis wavelet discreto.

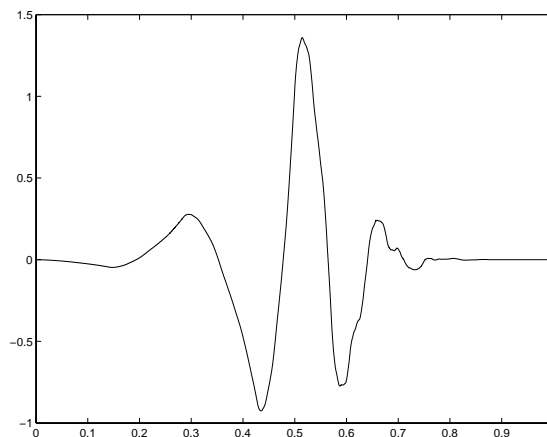


Figura 4.8. Representación de la función wavelet Daubechies 4.

Biortogonal: Esta familia de wavelets posee fase lineal, necesaria para la reconstrucción de señales e imágenes. Usando dos wavelets, una para la

descomposición y otra para la reconstrucción, en lugar de una sola (la misma), se derivan propiedades interesantes.

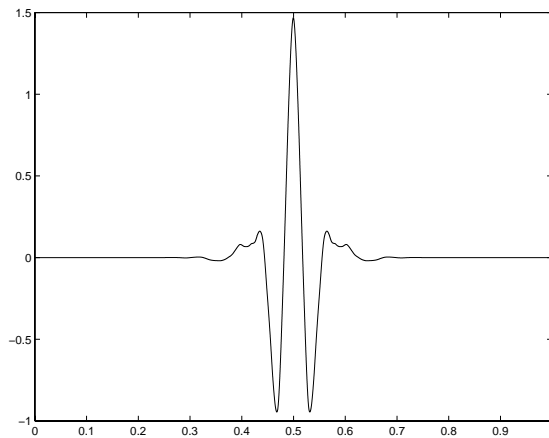


Figura 4.9. Representación de la función wavelet Biortogonal 6.8.

Coiflets: Construidas por Daubechies a requerimiento de R. Coifman, esta función wavelet tiene $2N$ momentos nulos y la función escalado tiene $2N-1$ momentos nulos. Las dos funciones tienen un soporte de longitud $6N-1$.

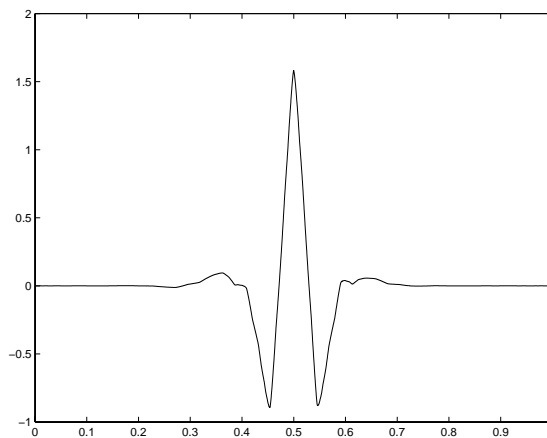


Figura 4.10. Representación de la función wavelet Coiflet 2.

Symlets: Las symlets son funciones casi simétricas propuestas por Daubechies como modificaciones de la familia de Daubechies. Las propiedades de las dos familias son parecidas.

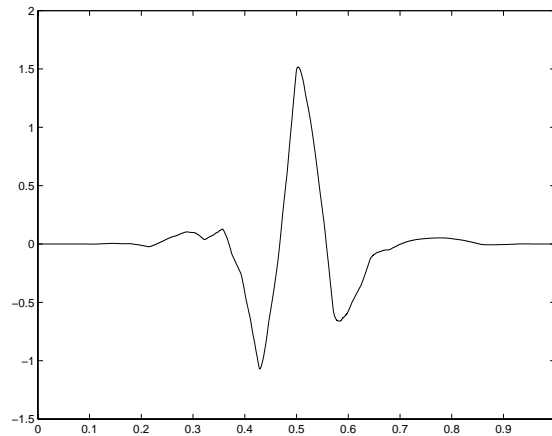


Figura 4.11. Representación de la función wavelet Symlet 4.

Morlet: Esta wavelet no tiene función de escalado, pero es explícita.

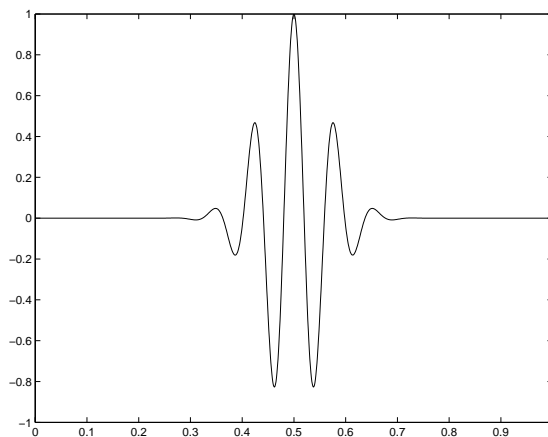


Figura 4.12. Representación de la función wavelet Morlet.

Sombrero mejicano: Esta wavelet no tiene función de escalado y se deriva de una función que es proporcional a la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad gaussiana.

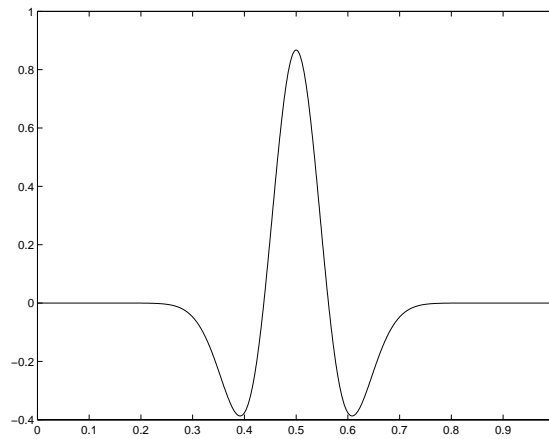


Figura 4.13. Representación de la función wavelet sombrero mejicano.

Meyer: La wavelet Meyer y la función de escalado están definidas en el dominio de la frecuencia.

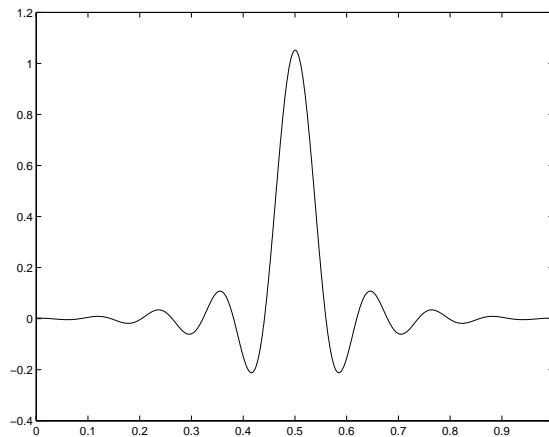


Figura 4.14. Representación de la función wavelet Meyer.

No son éstas las únicas familias de wavelets, aunque sí las más usadas. Si se desea una información más amplia existe una extensa bibliografía específica sobre el tema [4.7].

REFERENCIAS

- [4.1] S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime, S.W. Shevitz “Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review”. Rep. LA-13070-MS, Los Alamos Nacional Laboratory, Los Alamos, N.M (1996).
- [4.2] J.E. Doherty “Nondestructive evaluation”. Chapter 12 in Handbook on Experimental Mechanics, A.S. Kobayashi Edt. Society of Experimental Mechanics Inc. (1987).
- [4.3] Q. Wang, X. Deng “Damage detection with spatial wavelets”. International Journal of Solids and Structures, 36, pp. 3443-3468 (1999).
- [4.4] M.A. Colestock “Wavelets: A new tool for signal processing analyst”. Digital Avionics Systems Conference, IEEE, pp. 54-59 81993).
- [4.5] P.M. Bentley, J.T.E. McDonnell “Wavelet transforms: an introduction”. Electronic and Communication Engineering Journal, pp. 175-186 (1994).
- [4.6] A. Haar “Zur theorie der orthogonalen funktionen-systeme”. Math. Ann., 69, pp. 331-371 (1910).
- [4.7] Y. Meyer “Algorithms and Applications”. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania (1993).
- [4.8] R.J. Alonso, M. Noori, Z. Hou, A. Masuda “Comparative study between CWT and STFT for online monitoring applications in systems under random excitation”. Proceedings of DETC’01: ASME 2001 Design Engineering Technical Conferencies and Computers and Information in Engineering Conference, Pittsburgh, Pennsylvania (2001).
- [4.9] C.K. Chui “Introduction to wavelets”. Academic Press Inc., San Diego, CA (1992).

- [4.10] J. Mathew, Y. Alfredson “ The condition monitoring of rolling element bearings using vibration analysis”. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Transactions of ASME, Vol. 106, pp. 447-453 (1984).
- [4.11] W.J. Staszewski, G.R. Tomlinson “Application of the wavelet transform to fault detection in spur gear”. Mechanical Systems and Signal Processing, 8, pp.289-307 (1997).
- [4.12] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J.M. Poggi “Wavelet toolbox”. The Math Works Inc., Natick, MASS (2002).
- [4.13] G. Strang, T. Nguyen “Wavelet and filter banks”. Wellesley Cambridge Press, Wellesley, MASS (1997).
- [4.14] S.E. Khadem, M. Rezaee “Development of vibration signature analysis using multiwavelet systems”. Journal of Sound and Vibration, 261, pp. 613-633 (2003).
- [4.15] S. Mallat “A Wavelet tour of signal processing” Academic Press, Cambridge (1999).

CAPITULO 5

SIMULACIÓN DE VIBRACIONES LONGITUDINALES EN BARRAS CON EL MSR

5.1.- Introducción

En este capítulo se estudia la simulación de vibraciones longitudinales en barras mediante el MSR. Otros autores han aplicado el MSR para estudiar procesos físicos en los que su modelo matemático está formado por ecuaciones diferenciales de tipo parabólico, como procesos de conducción del calor [5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5], procesos de transporte en membranas [5.6, 5.7], procesos de electrodo [5.8, 5.9] y fenómenos electrocinéticos en partículas coloidales [5.10, 5.11, 5.12, 5.13]. Sin embargo, la ecuación diferencial que modela las vibraciones longitudinales de la barra es de tipo hiperbólico. Esto origina que la celda básica del modelo en red sea distinta a la utilizada hasta ahora en los diferentes estudios realizados con el MSR, por lo que ha sido necesario diseñar una celda básica específica para este proceso físico, así como comprobar su validez.

Debido a esto, la primera parte del capítulo se dedica a la elaboración de la celda básica y de los modelos en red, utilizando para ello los conceptos teóricos sobre el MSR introducidos en el Capítulo 2. Una vez construidos dichos modelos, se validan mediante la comparación de los resultados numéricos con las soluciones teóricas halladas en el Capítulo 3. En la parte final del capítulo, se presentan algunos resultados para una barra con una carga másica en un extremo, en cuyo caso no se dispone de solución teórica en el dominio del tiempo. Parte de los resultados de este capítulo, así como la elaboración de la celda elemental y de los modelos en red, pueden encontrarse en [5.14, 5.15, 5.16].

5.2.- Celda elemental para las vibraciones longitudinales de una barra

La elaboración de la celda elemental parte de la ecuación diferencial que modela el proceso físico, que en este caso es la ecuación de ondas¹:

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \quad (5.1)$$

Como se indicó en el Capítulo 2, el MSR trabaja con dos variables: una que se asigna a los nodos de la red, llamada potencial, y otra asociada a las ramas de esta, denominada flujo. Por tanto, el primer paso a dar es determinar qué variables del proceso físico se van a hacer corresponder con las del MSR, el potencial y el flujo. Teniendo en cuenta que las principales magnitudes físicas de este proceso son el desplazamiento de cada punto de la barra y el esfuerzo al que se encuentra sometido, y que la primera es una magnitud escalar mientras que la segunda es vectorial, está claro que el desplazamiento debe hacerse corresponder con el potencial, y el esfuerzo con el flujo. Sin embargo, por razones de carácter técnico del MSR, el flujo se hace corresponder con el esfuerzo con el signo cambiado:

$$\Phi \rightarrow \xi', \quad J \rightarrow -\sigma' \quad (5.2)$$

Por tanto, la relación entre el flujo y el potencial, la ecuación constitutiva, viene dada por la Ley de Hooke:

¹ En este capítulo se usa la notación de letras con prima para referirse a variables dimensionales y letras sin prima para las adimensionales.

$$J = -E \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \quad (5.3)$$

donde E es el módulo de Young de la barra. Debido a que trabajamos con estas dos variables, es mejor expresar la ecuación de ondas de la forma:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial x'} = \rho \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \quad (5.4)$$

o en su equivalente con las variables del MSR:

$$-\frac{\partial J}{\partial x'} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \quad (5.5)$$

Esta última ecuación será el punto de partida para la elaboración de la celda elemental.

Una vez establecida la ecuación del modelo matemático en la forma adecuada, el siguiente paso es realizar una discretización espacial del medio. Así, en este caso, se divide la barra en N celdas de tamaño $\Delta x'$, y se aproxima por diferencias finitas la derivada espacial que aparece en la ecuación (5.5), con lo que nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en el que cada ecuación corresponde a una celda:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{J_{i+\Delta} - J_{i-\Delta}}{\Delta x'} + \rho \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} \right\} = 0 \quad (5.6)$$

donde Φ_i es el potencial en la celda i , $J_{i+\Delta}$ el flujo que circula a la derecha de la celda i y $J_{i-\Delta}$ el flujo que circula a la izquierda de la celda i . Dado que las celdas están conectadas entre sí en cascada, el flujo que circula a la izquierda de la celda i es el mismo que circula a la derecha de la celda $i-1$, luego $J_{i-\Delta} = J_{(i-1)+\Delta}$, y del mismo modo, el flujo que circula a la derecha de la celda i es igual al que circula a la izquierda de la celda $i+1$, por lo se cumple que $J_{i+\Delta} = J_{(i+1)-\Delta}$.

Una forma más conveniente de expresar la ecuación correspondiente a cada celda es:

$$J_{i-\Delta} - J_{i+\Delta} - \Delta x' \rho \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} = 0 \quad (5.7)$$

En esta ecuación aparecen tres términos, dos de los cuales corresponden a un flujo, por lo que el tercero puede ser considerado como otro flujo. Debido a esto se puede definir:

$$J_{\gamma i} = \Delta x' \rho \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} \quad (5.8)$$

y la ecuación (5.7) se puede considerar un balance de los flujos que entran y salen de la celda i , de acuerdo con la ley de corrientes de Kirchoff:

$$J_{i-\Delta} - J_{i+\Delta} + J_{\gamma i} = 0 \quad (5.9)$$

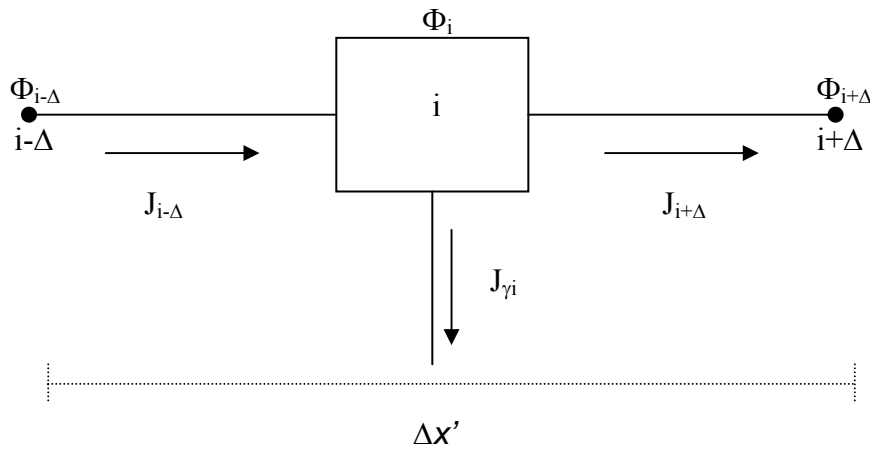


Figura 5.1. Esquema de la celda elemental.

Dado que trabajamos con variables discretas en el espacio, es necesario expresar la ecuación (5.3), que nos relaciona el flujo y el potencial, de forma discreta en lugar de continua. Para ello, la aproximamos por diferencias finitas, obteniendo que los flujos $J_{i\pm\Delta}$ se pueden expresar en función del potencial como:

$$\begin{aligned} J_{i-\Delta} &= E \frac{\Phi_{i-\Delta} - \Phi_i}{\Delta x' / 2} \\ J_{i+\Delta} &= E \frac{\Phi_i - \Phi_{i+\Delta}}{\Delta x' / 2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A la vista de estas expresiones, es posible relacionar los flujos $J_{i\pm\Delta}$ y los potenciales $\Phi_{i\pm\Delta}$ mediante una puerta resistiva de valor $R=\Delta x'/(2E)$ entre los nodos $i-\Delta$ e i , y entre i e $i+\Delta$.

El flujo $J_{\gamma i}$ se obtiene a partir del potencial Φ_i mediante la utilización de dos circuitos auxiliares. El primero de ellos consiste en una fuente dependiente de fuerza que produce el mismo potencial que hay en el nodo i , conectada a un condensador de capacidad C . El flujo que atraviesa el condensador es:

$$J_c = C \frac{d\Phi_i}{dt'} \quad (5.11)$$

flujo que introducimos en el segundo circuito auxiliar mediante una fuente dependiente de flujo, que está conectada a una bobina de inductancia I , por lo que el valor de la fuerza en la bobina (la diferencia de potencial entre sus extremos) es:

$$X_I = I \frac{dJ_c}{dt'} = IC \frac{d^2\Phi_i}{dt'^2} \quad (5.12)$$

De modo que $J_{\gamma i}$ se consigue a partir de estos circuitos auxiliares haciendo que $IC=\rho\Delta x'$, y colocando una fuente dependiente de flujo cuyo valor sea igual que X_I . Con ésto ya se tienen todos los elementos necesarios para la construcción de la celda elemental.

En la Figura 5.2 se muestra la celda elemental para las vibraciones longitudinales, sin los circuitos auxiliares, las cuales se muestran en la Figura 5.3.

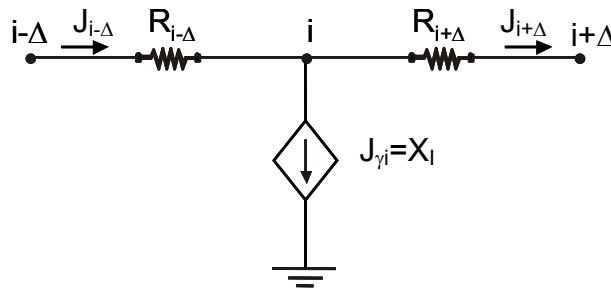


Figura 5.2. Celda elemental para las vibraciones longitudinales.

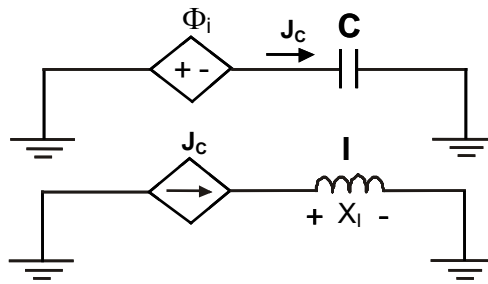


Figura 5.3. Circuitos auxiliares de la celda elemental.

Es interesante remarcar la forma en que las características físicas de la barra, la densidad y el módulo de Young, se distribuyen entre los diferentes elementos de circuito de la celda elemental. El modulo de Young afecta a la resistencia R , que determina la relación entre el flujo y el potencial, por lo que en los valores de la resistencia se pone de manifiesto la rigidez de la barra. El producto IC es proporcional a la densidad de la barra, por lo que en los circuitos auxiliares está recogida la información sobre su comportamiento inercial.

Una vez diseñada la celda elemental, el modelo en red se construye mediante la conexión de las N celdas en las que se ha dividido la barra, como se muestra en la Figura 5.4, y la incorporación de las condiciones de contorno. Dicha incorporación se realizará más tarde al estudiar cada tipo de barra en particular.

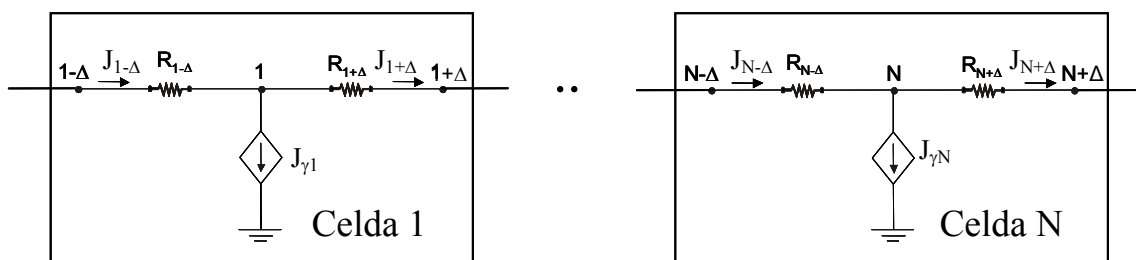


Figura 5.4. Conexión de las N celdas elementales.

En general, hemos comprobado que trabajando con $N=150$ se consiguen buenos resultados sin que el esfuerzo computacional (requisitos del ordenador para poder simular el modelo en red y tiempo de computación), que aumenta considerablemente al aumentar N , sea grande. Con este valor, el ancho de cada celda, si la longitud de la barra es $L=1$ m, es $\Delta x'=1/150=0.0067$ m. Hay que señalar que en las simulaciones se obtiene

el potencial en el nodo central de cada celda, por lo que Φ_1 corresponde a $x'=1/(2N)=0.0033$ m, Φ_2 a $x'=1/N+1/(2N)=0.01$ m, y así sucesivamente. Por el contrario, el flujo se obtiene en los extremos de la celda, por lo que $J_{1-\Delta}$ corresponde a $x'=0/N=0$, $J_{1+\Delta}$ a $x'=1/N=0.0067$ m, $J_{2+\Delta}$ a $x'=2/N=0.0134$ m, y así sucesivamente. Esto da lugar a que no se pueda obtener el desplazamiento o el esfuerzo en cualquier posición, sino solo en un conjunto discreto de posiciones. Por ejemplo, no se puede obtener el desplazamiento en el centro de la barra, en $x'=0.5$ m, sino que la posición más cercana es $x'=0.4967$ m, que corresponde al centro de la celda 75. Por el contrario, el esfuerzo sí puede obtenerse en $x'=0.5$ m, ya que esta posición corresponde al extremo derecho de la celda 75, pero no puede obtenerse en $x'=0.4967$ m. Dada la poca diferencia entre $x'=0.4967$ m y $x'=0.5$ m, se puede tener la tentación de aproximar 0.4967 m a 0.5 m para poner un número más agradable estéticamente. Sin embargo, en esta Memoria no lo hemos hecho así, ya que éso, aparte de ser una incorrección poco propia de un texto científico, podría llevar a paradojas como la de estudiar el desplazamiento y el flujo en la misma posición, lo que no es posible con el MSR.

5.3.- Celda elemental con variables adimensionales

A lo largo de la Memoria trabajaremos con variables adimensionales, tanto por razones de tipo práctico, a la hora de llevar a cabo las simulaciones, como por tener mayor generalidad en los resultados obtenidos. Así pues, es necesario determinar cómo es la relación entre las variables adimensionales y las dimensionales, y cómo afecta este cambio a los valores de los elementos de circuito de la celda elemental.

La ecuación de onda con variables adimensionales es:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (5.13)$$

La relación entre variables dimensionales y adimensionales viene dada en la Tabla 5.1. Con esta relación es posible adaptar cualquier resultado obtenido con las variables adimensionales a una situación real con una barra concreta, con sus propias características físicas.

Desplazamiento	Tiempo	Posición	Esfuerzo	Frecuencia
$\xi = \xi' / L$	$t = ct' / L$	$x = x' / L$	$\sigma = \sigma' / E$	$f = Lf' / c$

Tabla 5.1. Relación entre variables dimensionales (con prima) y adimensionales (sin prima).

Los valores de los elementos del circuito al trabajar con variables adimensionales se expresan en la Tabla 5.2. La única diferencia es que no aparece ni la densidad ni el módulo de Young, pues pasan a tener el valor unidad. Sin embargo, eso no provoca que los elementos del circuito pierdan su relación con dichas características de la barra, ya que esto es algo que no tiene relación con su valor numérico, sino que viene implícito en el diseño de la celda elemental. La diferencia es que ahora dicha relación no viene expresada explícitamente, pero se mantiene el papel que juegan la resistencia, la capacidad y la inductancia en relación con la rigidez y la densidad de la barra. La razón por la cual no se construye la celda básica directamente a partir de la ecuación de ondas adimensional, lo que hubiera hecho innecesaria esta sección, es precisamente para poder mostrar de forma explícita la relación de los elementos de la celda con las características físicas de la barra.

Celda con variables dimensionales	Celda con variables adimensionales
$R = \Delta x' / (2E)$	$R = \Delta x / 2$
$IC = \rho \Delta x'$	$IC = \Delta x$

Tabla 5.2. Valores de los elementos de circuito de la celda elemental con variables dimensionales y adimensionales.

5.4.- Simulación de vibraciones longitudinales en una barra fija-fija

5.4.1.- Modelo en red

Como se ha dicho anteriormente, el modelo en red no está completo hasta que se le incorporan las condiciones de contorno, que dependen del tipo concreto de barra que se quiere estudiar.

Las condiciones de contorno de una barra fija-fija son, como se expuso en el Capítulo 3:

$$\begin{cases} \xi'(0, t') = 0 \\ \xi'(L, t') = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

o, en variables adimensionales:

$$\begin{cases} \xi(0, t) = 0 \\ \xi(1, t) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

En términos del MSR, estas condiciones de contorno implican fijar el potencial en los extremos del modelo en red de forma que su valor siempre sea nulo, lo que se consigue conectando a tierra dichos extremos. En la Figura 5.5 se muestra el modelo en red para esta barra con la implementación de las condiciones de contorno.

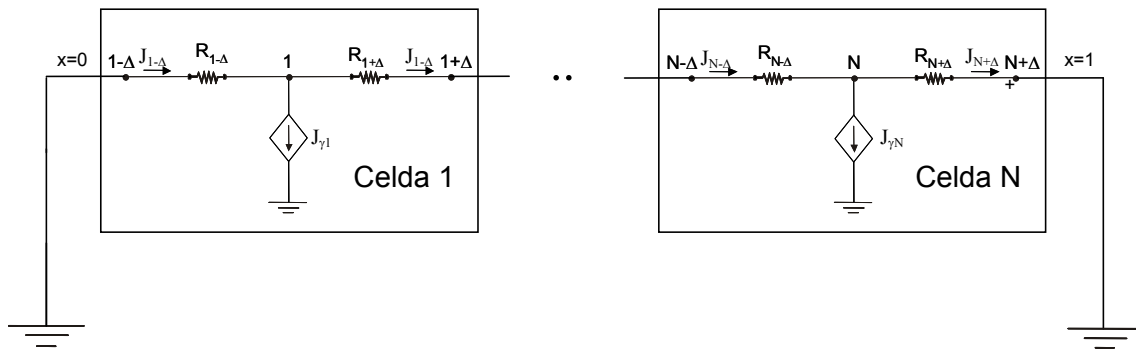


Figura 5.5. Modelo en red para la barra fija-fija.

5.4.2.- Simulación de vibraciones libres

El único tipo de vibraciones que pueden estudiarse en la barra fija-fija son las vibraciones libres (producidas al imponer condiciones iniciales), pues no es posible la aplicación de una fuerza en los extremos por estar fijos. Dentro de todas las posibles condiciones iniciales que se pueden imponer, nos centraremos en los modos de vibración. Así, como condiciones iniciales de la barra impondremos un modo de vibración, por lo que, al ser ortogonales entre sí, la barra vibrará manteniendo la forma del modo de vibración a la frecuencia propia característica de dicho modo. Esto nos servirá como primer ensayo para comprobar la validez del MSR en la simulación de vibraciones.

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
β_n	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π
f_n	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

Tabla 5.3. Número de onda y frecuencia natural para cada modo.

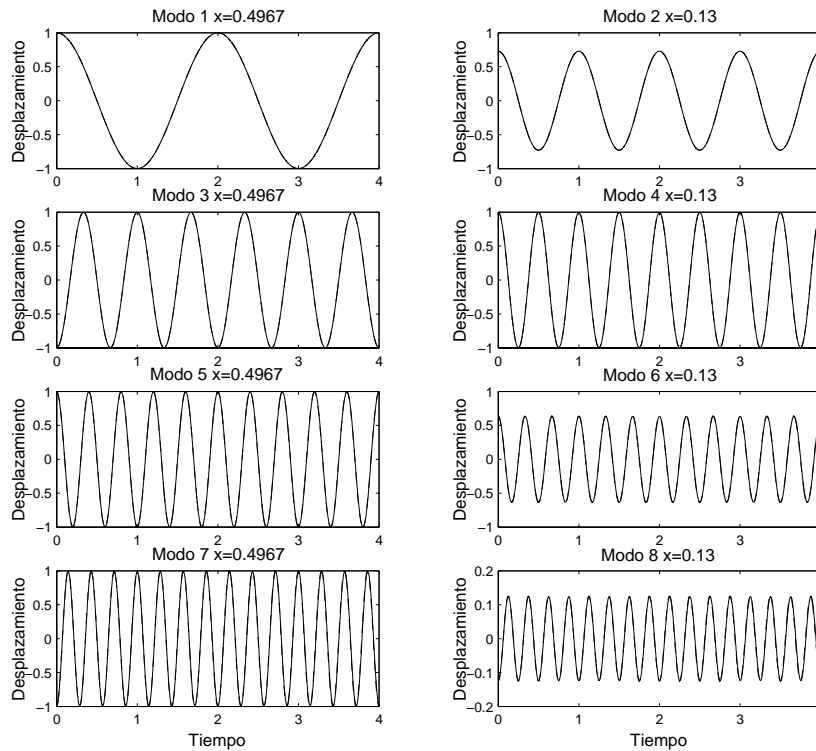


Figura 5.6. Comparación entre el desplazamiento en una posición de la barra en función del tiempo obtenido con el MSR (línea continua) y la solución teórica (línea discontinua) para los ocho primeros modos de la barra fija-fija.

Se han simulado las vibraciones libres al imponer como condiciones iniciales los ocho primeros modos de vibración de la barra, cuyos datos se muestran en la Tabla 5.3, y se han comparado los resultados obtenidos, tanto para el desplazamiento como para el esfuerzo, con las soluciones teóricas, con el fin de validar el MSR. En la Figura 5.6 se muestran los resultados de la simulación para el desplazamiento en una posición, en $x=0.4967$ para los modos impares y en $x=0.13$ para los pares, junto con la solución teórica. En esta figura se puede observar que la coincidencia entre la simulación y la solución teórica es completa. No es posible apreciar ninguna discrepancia entre ambas gráficas. La razón para estudiar en posiciones distintas los modos pares e impares es que $x=0.4967$ es la posición más centrada de la barra, y por tanto la más característica, por lo que nos ha parecido interesante presentar los resultados en este punto. Sin embargo,

tiene el problema de que en los modos pares esa posición tiene un valor casi nulo para el desplazamiento, por lo que esos modos los hemos estudiado en una posición arbitraria.

Del mismo modo, en la Figura 5.7 se presentan los resultados de la simulación para el esfuerzo en una posición, en $x=0.5$ para los modos pares y en $x=0.1333$ para los impares (cuyo valor para el esfuerzo en $x=0.5$ es nulo), junto con la solución teórica. Se comprueba de nuevo que tampoco hay diferencia apreciable entre los resultados de la simulación y la expresión teórica.

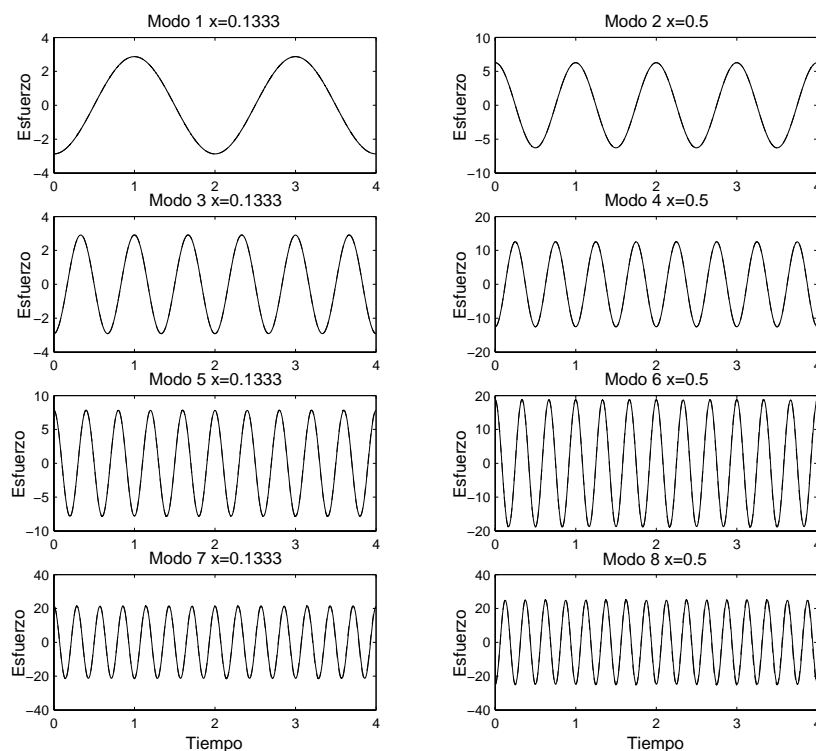


Figura 5.7. Comparación entre el esfuerzo en una posición de la barra en función del tiempo obtenido con el MSR y la solución teórica, para los ocho primeros modos de la barra fija-fija.

5.5.- Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-fija

5.5.1.- Modelo en red

La condición de contorno de extremo libre en $x=0$ implica que el esfuerzo en dicho extremo sea nulo, lo que se traduce en que el flujo en el extremo izquierdo de la primera celda, $J_{1-\Delta}$, ha de ser cero. En el modelo en red, esto se consigue mediante la

incorporación en dicho extremo de una resistencia R_∞ de valor infinito (en la práctica, de valor muy grande comparado con R). La condición de contorno de extremo fijo en $x=1$ se implementa de la misma forma que en la barra fija-fija, conectando a tierra la parte derecha de la celda N -ésima. En la Figura 5.8 se muestra el modelo en red completo de la barra libre-fija.

La presencia de un extremo libre permite la aplicación de una fuerza longitudinal en dicho extremo, produciendo vibraciones forzadas en la barra. En ese caso, el esfuerzo en el extremo libre no es cero, sino que viene fijado por la fuerza aplicada. Ahora, en lugar de conectar una resistencia de valor infinito en $x=0$, se incorpora una fuente independiente de flujo, cuyo valor J_a viene determinado por la fuerza aplicada. En la Figura 5.9 se puede ver el modelo en red de la barra libre-fija cuando hay una fuerza aplicada, en cuyo caso se puede denominar también barra forzada-fija.

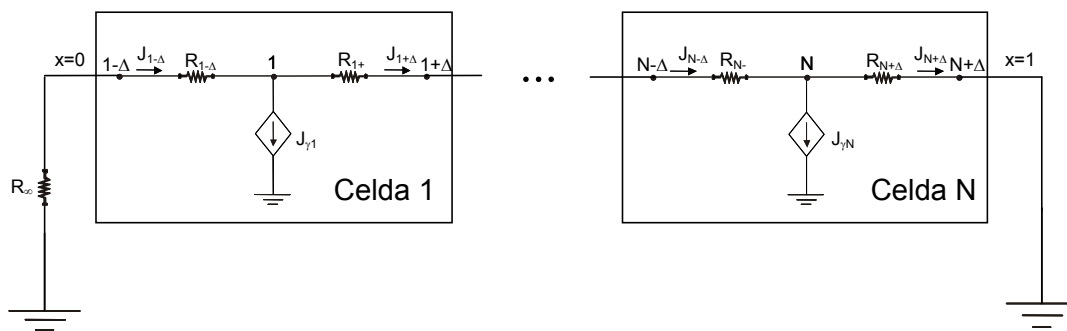


Figura 5.8. Modelo en red de la barra libre-fija.

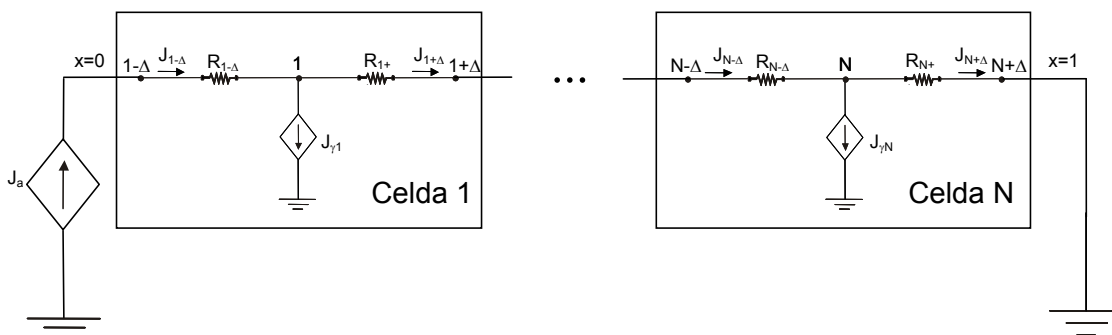


Figura 5.9. Modelo en red de la barra libre-fija con una fuerza aplicada.

5.5.2.- Simulación de vibraciones forzadas

Dado que para la barra fija-fija estudiamos las vibraciones libres, para este tipo de barra nos centraremos en el fenómeno de las vibraciones forzadas, que por otro lado es más interesante y variado que el anterior. Para ello, simulamos la aplicación de dos tipos distintos de fuerza, una de tipo senoidal o armónica, y otra tipo pulso, mediante el modelo en red de la Figura 5.9. En todos los casos la fuerza se aplicará en el extremo izquierdo de la barra. Dentro de cada apartado estudiaremos varios casos: para la fuerza armónica se simulará su aplicación con tres frecuencias distintas, y para la fuerza tipo pulso se simulará la aplicación de un pulso cuadrado y de un pulso gaussiano.

5.5.2.1.- Aplicación de una fuerza senoidal

La característica más importante que determina el comportamiento de la barra al aplicarle una fuerza senoidal es la relación entre la frecuencia de la fuerza aplicada, f_a , y las frecuencias naturales de la barra, f_n . Si f_a es menor que la primera frecuencia natural, el desplazamiento producido en la barra variará de forma senoidal a la frecuencia aplicada, sin que se produzcan saltos de desplazamiento y sin que se aprecien las reflexiones de la onda aplicada en el extremo fijo. Si, por el contrario, f_a es mayor que f_1 , el desplazamiento variará de forma más abrupta y no oscilará únicamente a la frecuencia aplicada, sino que también lo hará según las frecuencias naturales. El peso e importancia de cada una de ellas dependerá de la f_a concreta con la que se trabaje. En el caso de que f_a sea una de las frecuencias naturales, se producirá la resonancia de la barra y el desplazamiento tendrá una forma senoidal de frecuencia f_a , y su amplitud será mucho mayor que en cualquier otra circunstancia.

Para comprobar el comportamiento del MSR según la relación entre la fuerza aplicada y las frecuencias naturales de la barra, se estudia la aplicación de tres frecuencias distintas:

- $f_a=0.2$, que es ligeramente menor que la primera frecuencia natural de la barra, por lo que se puede considerar una frecuencia baja.
- $f_a=1.3$, que es algo mayor que la segunda frecuencia natural, por lo que es una frecuencia intermedia.

- $f_a=4.85$, que es ligeramente mayor que la décima frecuencia natural, siendo por tanto una frecuencia muy alta.

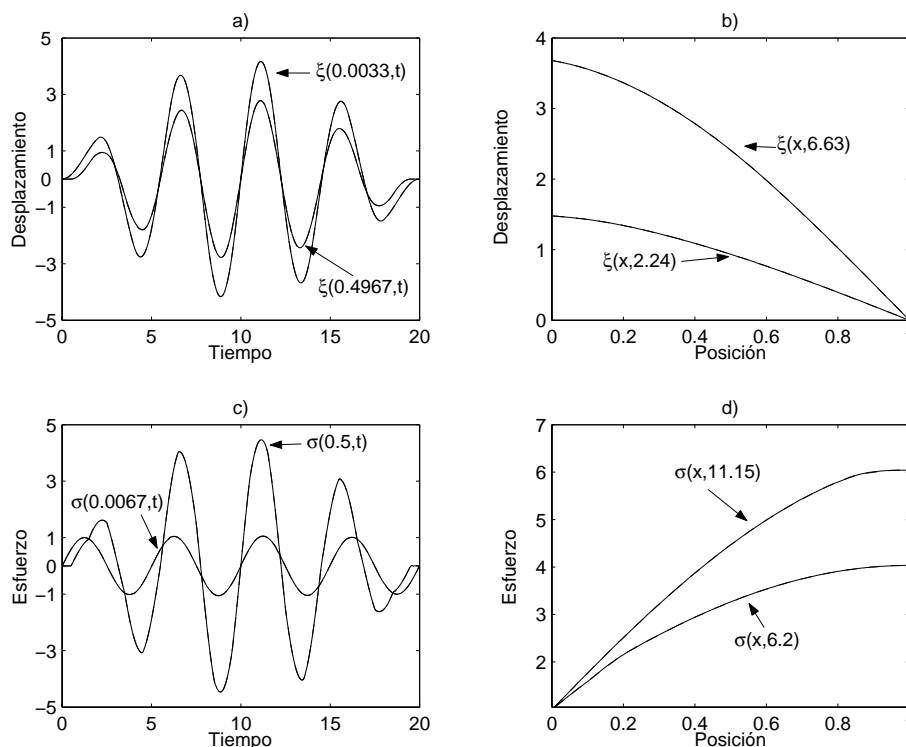


Figura 5.10. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=0.2$ a la barra libre-fija. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en dos posiciones de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en dos posiciones de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

La respuesta de la barra al aplicar la fuerza armónica de frecuencia $f_a=0.2$, así como la comparación con la solución teórica, se puede ver en la Figura 5.10. En esta figura se representa el desplazamiento y el esfuerzo que se producen en la barra en función del tiempo y la posición. Así, en la Figura 5.10.a se muestra el desplazamiento en la celda más cercana al extremo izquierdo de la barra, cuya posición es $x=0.0033$, y en la celda que se encuentra más próxima al centro de la barra, que proporciona el desplazamiento en $x=0.4967$, así como la solución teórica correspondiente. En la Figura 5.10.b se muestra el desplazamiento a lo largo de la barra en dos tiempos distintos, $t=2.24$ y 6.63 , que corresponden a los tiempos en los que se alcanza un máximo relativo en las posiciones $x=0.0033$ y 0.4967 , respectivamente. En ambas figuras se aprecia que, como era de esperar por la frecuencia de la fuerza aplicada, la variación del desplazamiento es muy suave, tanto con el tiempo como con la posición. Y, dado que la

frecuencia es inferior a la primera frecuencia natural, el máximo del desplazamiento aparece en el extremo izquierdo, donde se aplica la fuerza.

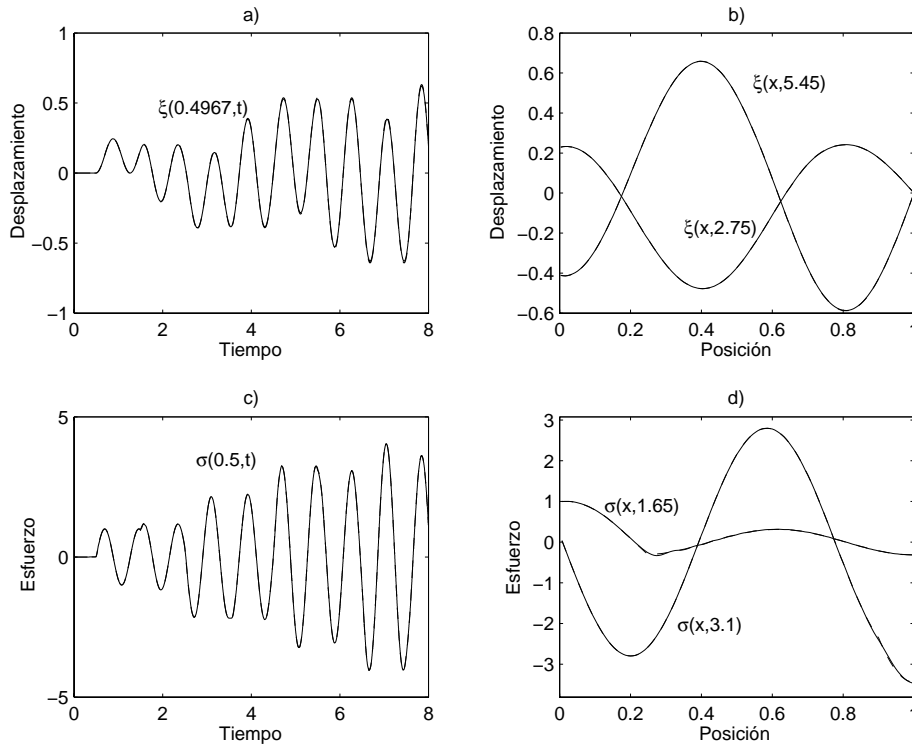


Figura 5.11. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=1.3$ a la barra libre-fija. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

En las Figuras 5.10.c y 5.10.d se realiza el mismo estudio para el esfuerzo. En la Figura 5.10.c se muestra la variación con el tiempo del esfuerzo en la posición más cercana al extremo izquierdo², $x=0.0067$, y en el centro de la barra, $x=0.5$, mientras que en la Figura 5.10.d se muestra la variación con la posición del esfuerzo en dos tiempos distintos, que corresponden a los máximos relativos del esfuerzo en $x=0.0067$ y 0.5 . Al igual que ocurre con el desplazamiento, el esfuerzo varía de forma suave con el tiempo y la posición, aunque en este último caso el máximo se produce en $x=1$.

² En realidad, con este modelo en red es posible estudiar el esfuerzo en $x=0$, pero ese esfuerzo sería directamente el esfuerzo externo aplicado.

En cuanto a la comparación de los resultados de la simulación con las expresiones teóricas, ambas gráficas coinciden en todos los casos, tanto para el desplazamiento como para el esfuerzo, por lo que se puede afirmar que el MSR simula este caso de manera muy eficiente.

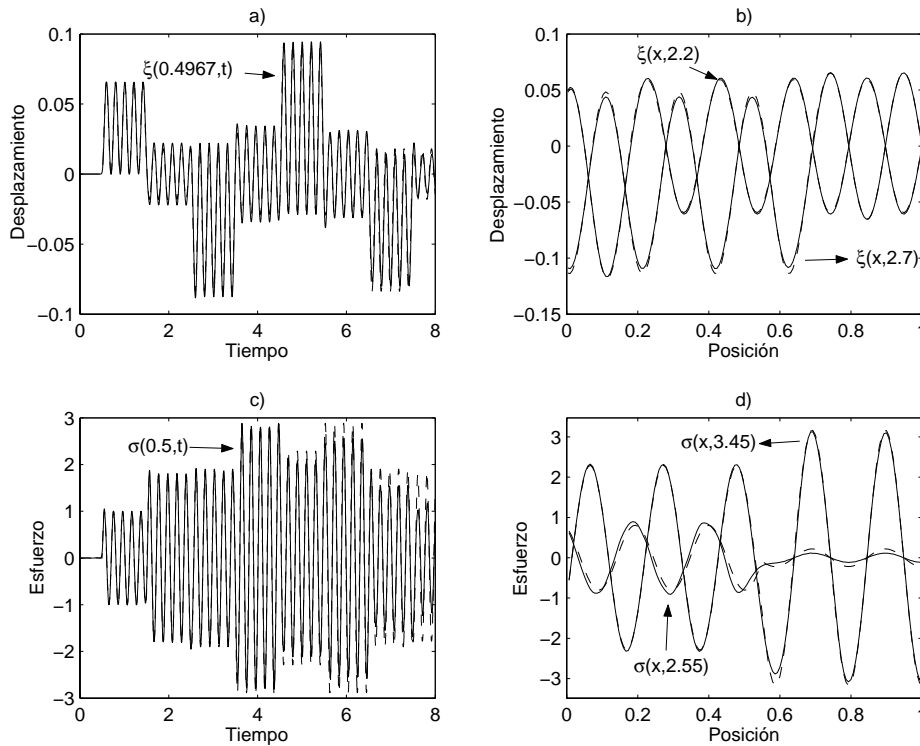


Figura 5.12. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=4.85$ a la barra libre-fija. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

En las Figuras 5.11 y 5.12 se repite el mismo estudio cuando la fuerza senoidal aplicada tiene una frecuencia de 1.3 y 4.85, respectivamente. La respuesta de la barra al aplicarle la fuerza de 1.3 ya es más compleja que con 0.2, apareciendo máximos y mínimos en el interior de la barra al representar el desplazamiento y el esfuerzo con la posición, y muchas oscilaciones al representar estas magnitudes en función del tiempo. Se aprecia perfectamente la llegada a cada posición estudiada de las ondas reflejadas en cada extremo (aparecen cambios en la vibración), cosa que no ocurría con $f_a=0.2$. En cuanto a la comparación con las expresiones teóricas, no es posible apreciar a simple vista diferencia alguna entre teoría y simulación, aunque aumentando el tamaño de las

figuras es posible observar pequeñas diferencias de amplitud en los picos de las últimas oscilaciones de las Figuras 5.11.a y 5.11.c.

La respuesta de la barra con $f_a=4.85$ es similar a la de $f_a=1.3$, pero, al ser esta frecuencia mayor que la décima frecuencia natural de la barra, se producen muchas más oscilaciones, tanto en la variación temporal como espacial, oscilando las variables de forma mucho más brusca. Por razones de claridad en la gráfica, al estudiar la variación del desplazamiento y del esfuerzo con el tiempo solo se estudia una posición. Con esta frecuencia ya se empiezan a notar pequeñas diferencias entre la simulación y la solución teórica. Al estudiar la variación del desplazamiento con el tiempo, se observa que a partir de la llegada de la primera onda reflejada, comienzan a aparecer pequeñas diferencias de amplitud entre las dos gráficas que se mantienen a lo largo de todo el intervalo de tiempo considerado, aunque la forma de las oscilaciones es la misma. Estas diferencias de amplitud se mantienen también al estudiar el desplazamiento a lo largo de la barra, produciéndose más o menos diferencias según el instante de tiempo considerado. Con el esfuerzo se produce la misma situación, a partir de la primera llegada de la onda reflejada se produce una pequeña diferencia de amplitud entre teoría y simulación, manteniendo ambas la misma forma.

En general, los errores en la simulación suelen aparecer en los picos de las oscilaciones, tanto al considerar la variación con el tiempo como con la posición, es decir, cuando hay un cambio brusco en el valor de la variable, de forma que la simulación no es capaz de seguir correctamente este cambio, produciendo un valor numérico ligeramente distinto. Este error se compensa en los instantes de tiempo siguientes, permitiendo que entre los picos no se produzcan errores y que se mantenga la forma de la vibración, aunque vuelve a aparecer en el siguiente cambio importante de la variable. Dado que el esfuerzo varía, en general, a una frecuencia mayor que el desplazamiento, sus cambios son más bruscos que los del desplazamiento, por lo que aparecen más errores, como se puede apreciar en las Figuras 5.12.c y 5.12.d.

5.5.2.2.- *Aplicación de una fuerza tipo pulso*

Con la simulación de la aplicación de una fuerza tipo pulso se intenta representar la aplicación de fuerzas impulsivas o de choque en la barra. En este apartado estudiamos la aplicación de una fuerza tipo pulso cuadrado, cuya expresión es:

$$F_{Pc}=A p(t) \quad (5.14)$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases} \quad (5.15)$$

Se trata de una fuerza constante aplicada durante un tiempo t_1 , que tomaremos como:

$$t_1=0.05 \quad (5.16)$$

para que represente una fuerza de corta duración. También consideramos la aplicación de un pulso gaussiano, cuya expresión es:

$$F_{Pg}=A g(t) \quad (5.17)$$

$$g(t)=\exp[-m^2(t-t_2)^2] \quad (5.18)$$

con

$$t_2=0.05 \quad (5.19)$$

$$m=100 \quad (5.20)$$

de forma que simule la aplicación de una fuerza impulsiva en t_2 .

En la Figura 5.13 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el pulso cuadrado, junto con la solución teórica. Cuando el pulso aplicado llega a una posición determinada de la barra, produce un cambio brusco en el desplazamiento, pasando casi inmediatamente de cero a un valor que se mantiene fijo hasta que vuelve a llegar el pulso, tras reflejarse en un extremo. En el extremo fijo, el esfuerzo aplicado se refleja manteniendo el mismo signo, como se puede ver en la Figura 5.13.c, pero al atravesar la barra en sentido opuesto al anterior, produce una disminución del desplazamiento, por lo que se vuelve a hacer cero. Sin embargo, en el extremo libre el pulso se refleja cambiando de signo, pasando a ser negativo, lo que hace que al recorrer la barra en el sentido positivo del eje x produzca de nuevo una disminución del desplazamiento. La siguiente reflexión en el extremo fijo mantiene el signo negativo del pulso, pero al recorrer la barra en sentido negativo produce un aumento del desplazamiento. Esta es, a grandes rasgos, la explicación de la respuesta teórica de la barra en función del tiempo que se puede observar en la Figura 5.13.

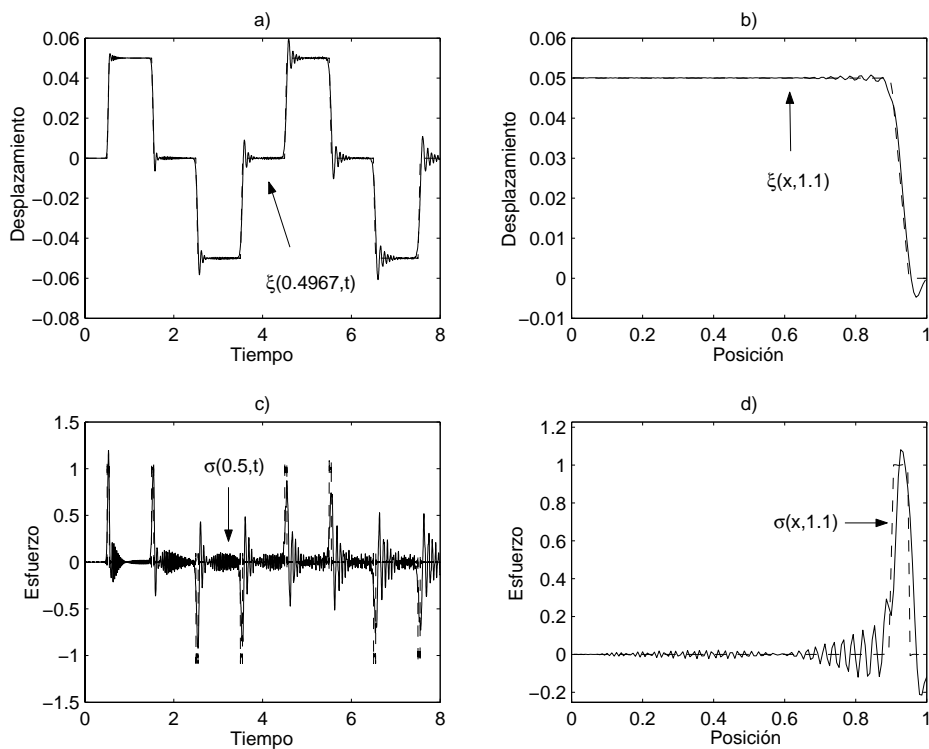


Figura 5.13. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar el pulso cuadrado a la barra libre-fija. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en un instante de tiempo. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en un instante de tiempo.

Sin embargo, los resultados de la simulación son algo distintos, ya que le es imposible seguir los cambios bruscos que se producen en este caso, por lo que aparecen oscilaciones en los instantes de cambio súbito del desplazamiento, oscilaciones que podemos llamar ficticias o ruido numérico. El error que producen esas oscilaciones se va acumulando con el tiempo, por lo que en los instantes finales son más grandes y se producen durante un intervalo de tiempo mayor. En el caso del esfuerzo, en una posición dada de la barra cuando llega el pulso el esfuerzo aumenta o disminuye desde cero hasta un valor determinado durante el tiempo que dura el pulso ($t_1=0.5$), por lo que el cambio es mucho más brusco que en el caso del desplazamiento, lo que hace que se produzcan muchas más oscilaciones, como se puede ver en la Figura 5.13.c.

Otra forma de entender o interpretar lo que ocurre es mediante la consideración del fenómeno llamado “oscilaciones de Gibbs”, que consiste en la aparición de oscilaciones al tratar de representar funciones discontinuas mediante series de Fourier. La amplitud e importancia de dichas oscilaciones depende del número de términos

considerados, pero, dado que es imposible trabajar con una serie infinita, en la práctica dichas oscilaciones aparecen, aunque sea en una escala infinitesimal y sean inapreciables. En nuestro caso, para calcular la solución teórica hemos utilizado una serie de 5000 términos, lo que hace inapreciable las oscilaciones de Gibbs. Sin embargo, al basarse en parte el MSR en hacer diferencias finitas en la barra, hay un límite superior a las frecuencias con las que puede trabajar y que puede resolver, lo que provoca la aparición de oscilaciones de Gibbs en el desplazamiento y el esfuerzo, ya que su forma teórica es discontinua.

A pesar de este inconveniente, es posible extraer información de la simulación una vez que se conoce qué es lo que ocurre. Así, en las Figura 5.13.a es fácil saber cuáles son los valores del desplazamiento en cada momento si no tenemos en cuenta las oscilaciones, o si consideramos su valor medio, al igual que en la Figura 5.13.b. En el caso del esfuerzo, la aparición de tantas oscilaciones es un inconveniente muy grande, pero podemos conocer cuándo se produce el paso del pulso y el orden de la amplitud de esfuerzo que produce.

Al aplicar el pulso gaussiano (véase la Figura 5.14) se produce una situación prácticamente idéntica, con el desplazamiento cambiando de valor con cada pasada del pulso. El fenómeno de las oscilaciones de Gibbs se agrava en este caso debido a que es una fuerza de duración muy corta, casi una delta de Dirac, lo que conduce a que el desplazamiento varíe de una forma aún más discontinua que con el pulso cuadrado. Dado que para la solución teórica hemos considerado que se trataba de una delta de Dirac, en la gráfica que muestra el esfuerzo teórico con el tiempo (Figura 5.14.c) aparecen pulsos que son prácticamente funciones delta.

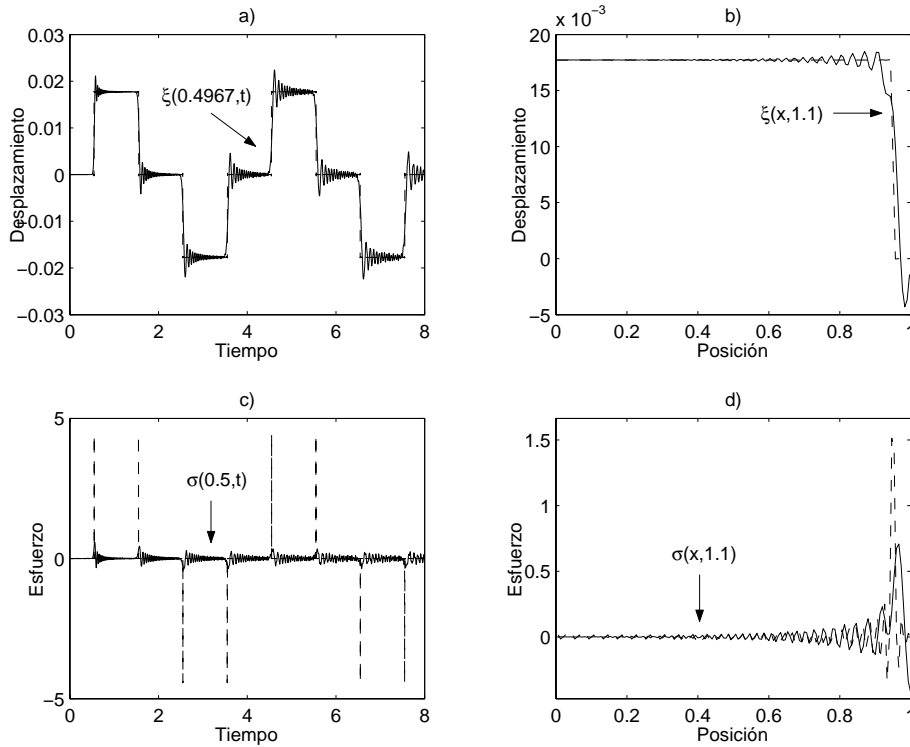


Figura 5.14. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar el pulso gaussiano a la barra libre-fija. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en un instante de tiempo. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en un instante de tiempo.

5.6.- Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-libre

5.6.1.- Modelo en red

Esta barra tiene los dos extremos libres, por lo que el esfuerzo en ambos extremos ha de ser cero, lo que implica que es necesario anular el flujo en $x=0$ y $x=1$. Ésto se consigue mediante la conexión de una resistencia de valor infinito al principio y al final del modelo en red (ver Figura 5.15).

Al tener los dos extremos libres, es posible aplicar una fuerza en cualquiera de ellos. En ese caso, bastará con sustituir la resistencia R_∞ por una fuente independiente de flujo que proporcione el esfuerzo aplicado, como se muestra en la Figura 5.16.

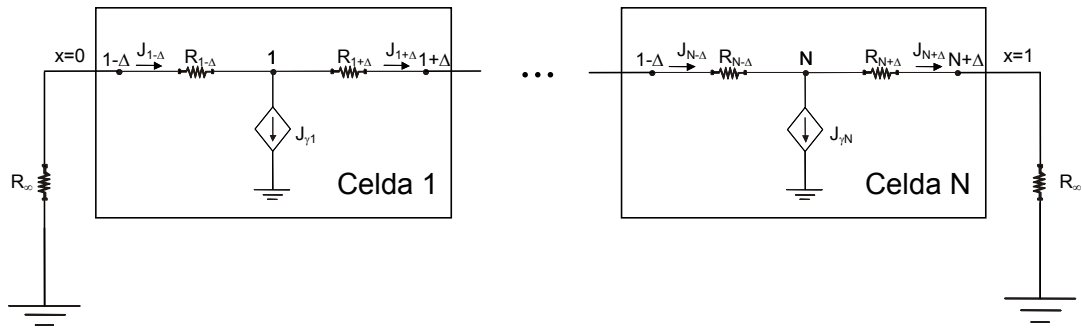


Figura 5.15. Modelo en red de la barra libre-libre.

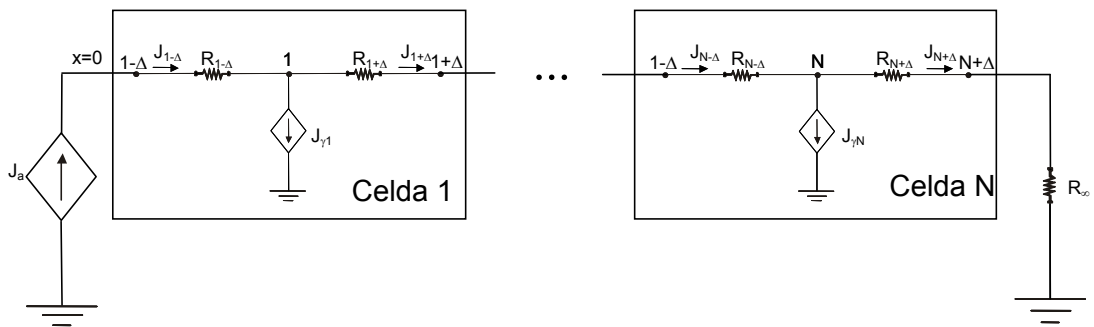


Figura 5.16. Modelo en red de la barra libre-libre con una fuerza aplicada en el extremo izquierdo.

5.6.2.- Simulación de vibraciones forzadas

La principal característica que destaca al estudiar el comportamiento vibratorio de esta situación física es que no tiene ningún tipo de ligaduras, por lo que la aplicación de una fuerza producirá un movimiento translacional de la barra, además del movimiento interno ondulatorio, lo que ocasiona que el desplazamiento siempre aumente en término medio. Se trata de una situación poco realista, ya que implica que la barra se sostiene por sí sola, y que la fuerza se mueve junto con la barra. No obstante, hemos considerado este caso solo para validar el MSR con otro tipo de condiciones de contorno y porque los resultados nos servirán para entender mejor el comportamiento de la barra con una carga másica.

5.6.2.1.- Aplicación de una fuerza senoidal

Los resultados obtenidos con el MSR al aplicar una fuerza armónica de frecuencia $f_a=0.2, 1.3$ y 4.85 a la barra libre-libre se muestran en las figuras 5.17, 5.18 y 5.19, respectivamente

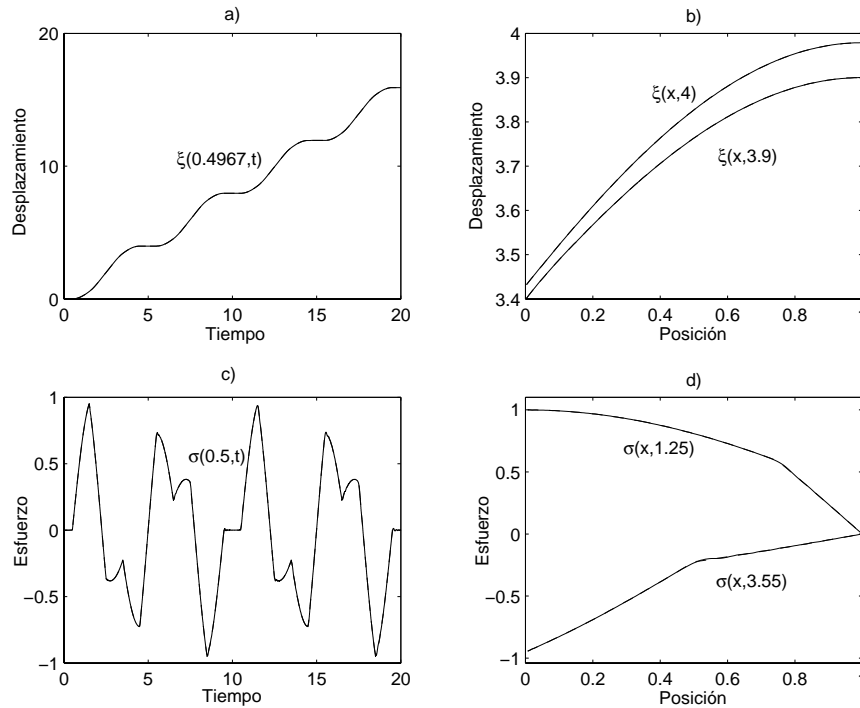


Figura 5.17. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=0.2$ a la barra libre-libre. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

En la Figura 5.17.a se puede ver que la fuerza senoidal de 0.2 produce un aumento casi lineal del desplazamiento, con una ligera oscilación de la misma frecuencia de la fuerza aplicada. En las Figuras 5.17.c y 5.17.d se pueden apreciar los cambios de pendiente que se producen en el esfuerzo al transmitirse a lo largo de la barra el esfuerzo reflejado en uno de los extremos libres. Al igual que en en la barra libre-fija, no se aprecian diferencias entre los resultados de la simulación y la solución teórica.

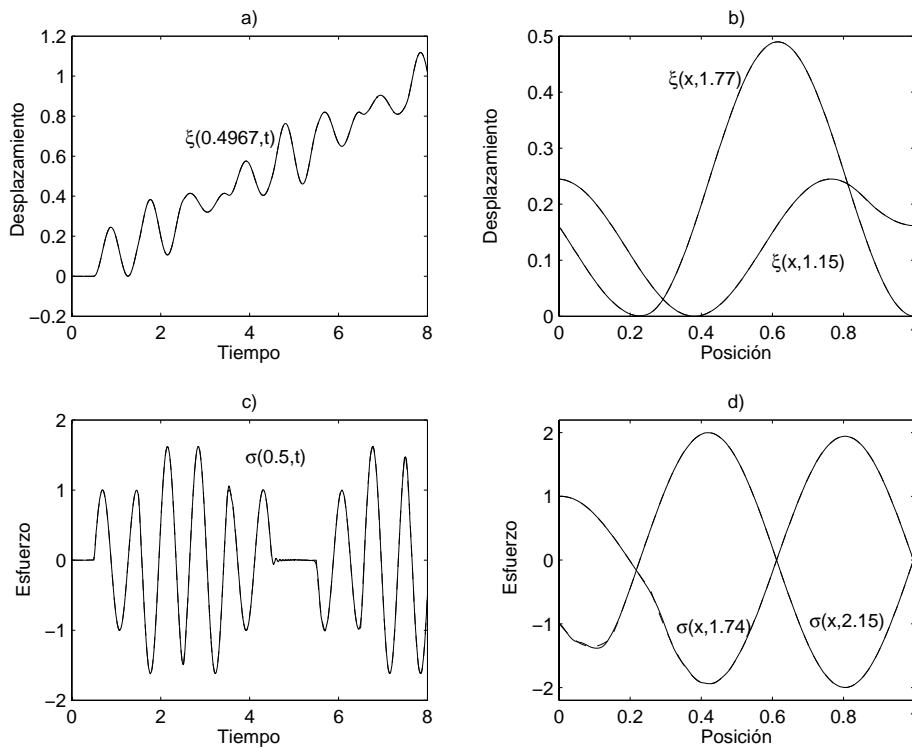


Figura 5.18. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=1.3$ a la barra libre-libre. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

En la Figura 5.18.a se puede observar cómo el aumento lineal del desplazamiento se produce después de la reflexión de la onda en el extremo libre, como era previsible, hasta ese momento la vibración es idéntica a la de la barra libre-fija. En el esfuerzo se observan también algunas discontinuidades en su pendiente, las cuales, al ser el menor el intervalo de tiempo estudiado que con 0.2, se producen en menor cantidad que en la Figura 5.17. Al igual que en la barra libre-fija, solo se aprecian pequeñas diferencias de amplitud entre la simulación y la teoría en los picos de las últimas oscilaciones.

Si se comparan las Figuras 5.12.a y 5.19.a, en las que se muestra la variación del desplazamiento al aplicar la fuerza senoidal de 4.85 en las barras libre-fija y libre-libre, se observa que la única diferencia entre ambas es que en la barra libre-fija la llegada de la onda reflejada en el extremo derecho produce una disminución, en término medio, del desplazamiento, mientras que en la libre-libre se produce un aumento, debido al cambio de signo del esfuerzo reflejado, así como de su cambio de sentido. En el caso del

esfuerzo, este disminuye ligeramente después de la primera reflexión, y, a partir de ahí, aumenta o disminuye según la forma en que se acoplan las ondas de esfuerzo reflejadas en los extremos con la producida por la fuerza aplicada en $x=0$. Las diferencias entre los resultados de la simulación y las expresiones teóricas siguen el mismo patrón que en la barra libre-fija, con diferencias de amplitud en los picos después de la primera reflexión manteniendo la forma de la onda.

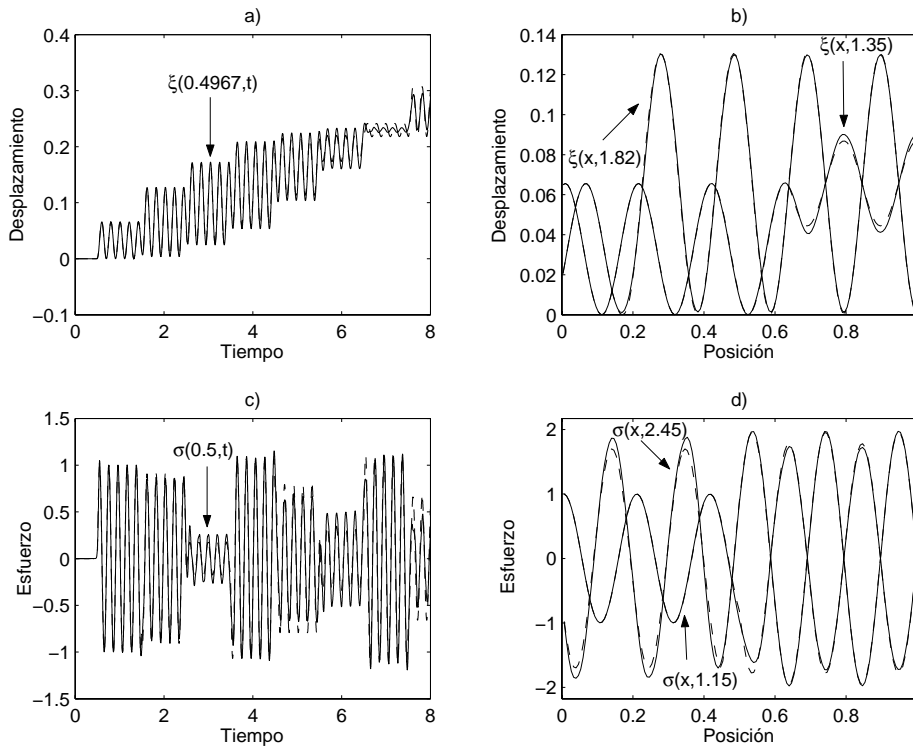


Figura 5.19. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=4.85$ a la barra libre-libre. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

5.6.2.2.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

Las características de la vibración de la barra libre-libre al aplicarle una fuerza tipo pulso no difieren demasiado de las de la barra libre-fija, salvo por el hecho de que el desplazamiento nunca disminuye sino que siempre aumenta.

En las Figuras 5.20 y 5.21 se muestran los resultados de la simulación junto con las expresiones teóricas, al aplicar un pulso cuadrado y un pulso gaussiano,

respectivamente. Al igual que en la barra libre-fija, el desplazamiento permanece constante hasta la llegada del pulso, que lo hace cambiar de forma brusca. Pero al contrario que en aquella, el desplazamiento aumenta con cada llegada del pulso, nunca disminuye.

La simulación con el MSR presenta los mismos problemas que en la barra libre-fija. Los cambios repentinos del valor del desplazamiento y del esfuerzo producen oscilaciones de Gibbs que aumentan de amplitud y duración conforme transcurre el tiempo.

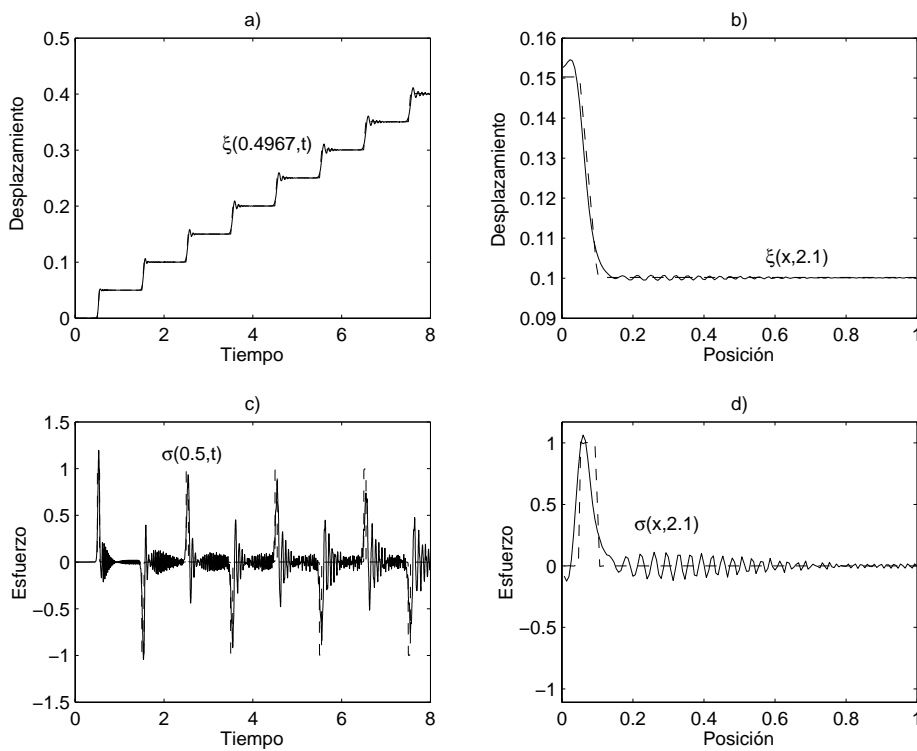


Figura 5.20. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar el pulso cuadrado a la barra libre-libre. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en un instante de tiempo. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en un instante de tiempo.

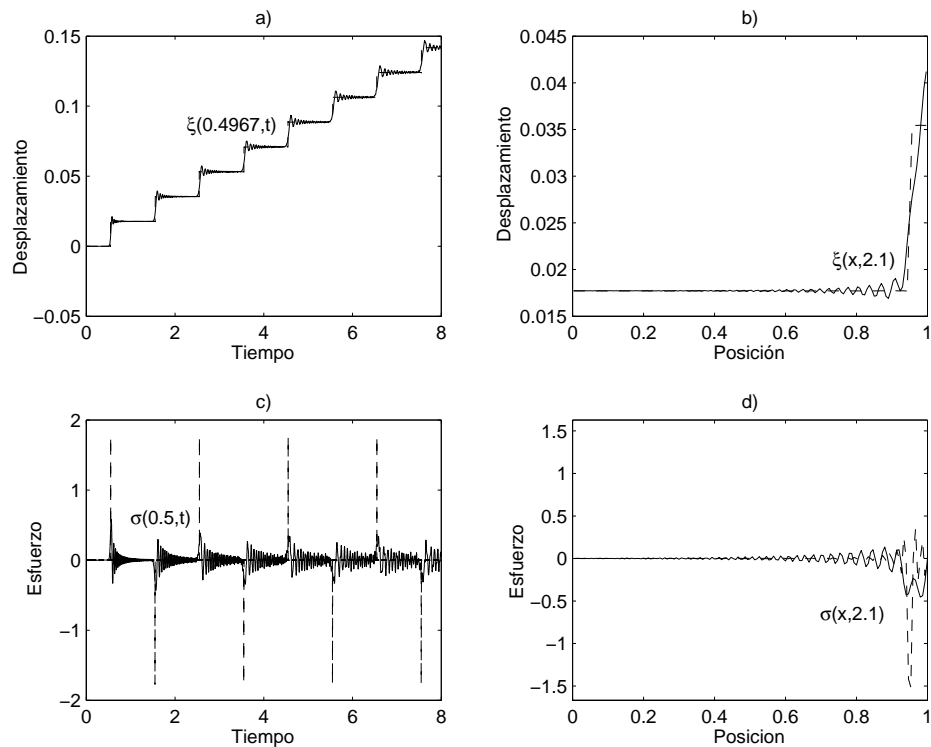


Figura 5.21. Comparación entre los resultados de la simulación (línea continua) y las expresiones teóricas (línea discontinua) al aplicar el pulso gaussiano a la barra libre-libre. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en un instante de tiempo. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en un instante de tiempo.

5.7.- Simulación de vibraciones longitudinales en una barra libre-carga másica

5.7.1.- Modelo en red

La condición de contorno de extremo con una carga másica es muy distinta de las condiciones de contorno consideradas hasta ahora. Las condiciones de contorno de extremo libre o fijo implican que una variable permanece fija y con valor nulo, ya sea el desplazamiento o el esfuerzo. Sin embargo, la condición de carga másica, como se vio en el Capítulo 3, lo que hace es establecer una relación entre el desplazamiento y el esfuerzo, siendo, por tanto, algo más difícil de tratar.

La condición de contorno de carga másica se expresa matemáticamente mediante la expresión:

$$-S\sigma'(L, t) = m' \left(\frac{\partial^2 \xi'(x', t')}{\partial t'^2} \right)_{x'=L} \quad (5.20)$$

cuya forma adimensional es:

$$-\sigma(1, t) = m \left(\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} \right)_{x=1} \quad (5.21)$$

donde $m=m'/(SL\rho)$, por lo que este parámetro indica la relación entre la carga másica, m' , y la masa total de la barra, $SL\rho$.

La implementación de esta condición de contorno en el modelo en red se realiza mediante la incorporación de una fuente dependiente de flujo que suministre el esfuerzo dado por la expresión (5.21). Para ello, es necesario usar circuitos auxiliares que determinen el esfuerzo requerido. Dada la similitud de la expresión (5.21) con la expresión (5.8) que nos da J_γ , es posible usar los mismos circuitos auxiliares que suministran J_γ , con el cambio adecuado de valor de los componentes del circuito. El modelo en red de la barra libre-carga másica es, por tanto, el de la Figura 5.22.

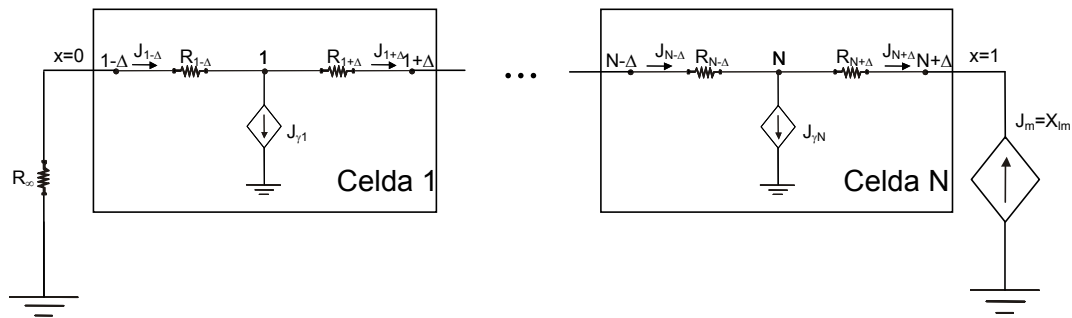


Figura 5.22. Modelo en red de la barra libre-carga másica.

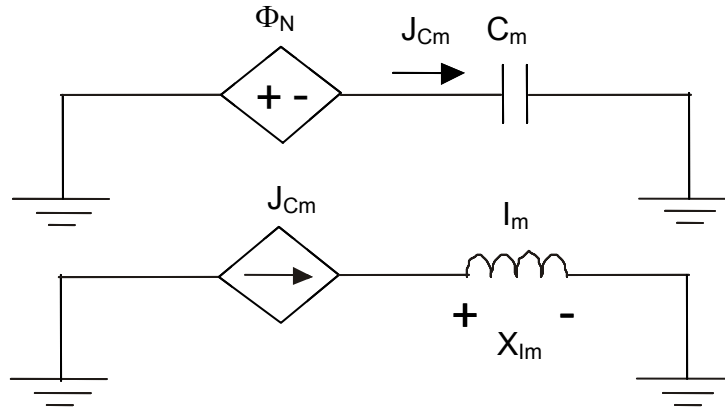


Figura 5.23. Circuitos auxiliares para el extremo con carga másica.

Los valores de los elementos de los circuitos auxiliares vienen dados en la Tabla 5.4.

	C_m	I_m
Variables dimensionales	$\sqrt{m'/S}$	$\sqrt{m'/S}$
Variables adimensionales	\sqrt{m}	\sqrt{m}

Tabla 5.4. Valores de los elementos de los circuitos auxiliares mostrados en la Figura 5.23.

Si se aplica una fuerza en el extremo libre, habrá que sustituir la resistencia R_∞ por una fuente independiente de flujo (ver Figura 5.24).

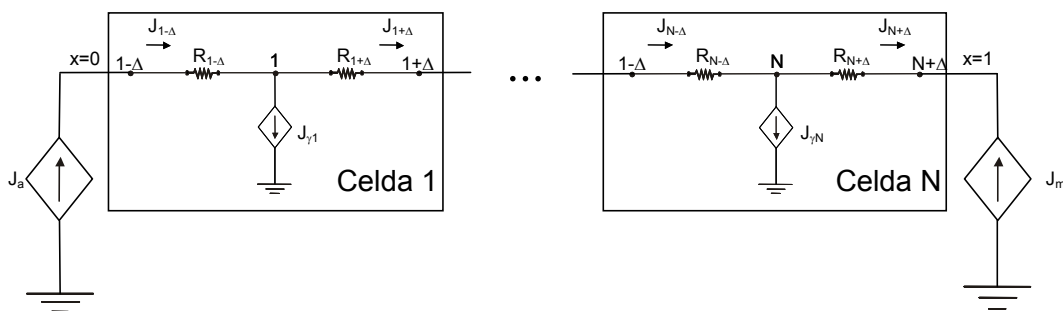


Figura 5.24. Modelo en red de la barra libre-carga másica con una fuerza aplicada en el extremo izquierdo.

5.7.2.- Simulación de vibraciones forzadas

Los casos estudiados anteriormente han servido para comprobar la validez del MSR a la hora de simular las vibraciones longitudinales en una barra. Dado que para la barra libre-carga másica no se dispone de una solución teórica para conocer la evolución temporal del desplazamiento o del esfuerzo, en este apartado se presentan solo algunos resultados para mostrar el movimiento vibratorio de esta barra, que se han validado mediante la comparación de las frecuencias naturales con las frecuencias obtenidas mediante la Transformada de Fourier de los resultados de la simulación.

Además, con el fin de poder comparar los resultados para el desplazamiento y el esfuerzo de esta barra con las condiciones anteriores, trabajamos con las mismas fuerzas: fuerzas senoidales de 0.2, 1.3 y 4.85, y fuerzas tipo pulso cuadrado y tipo pulso gaussiano. La carga másica con la que realizamos las simulaciones tiene un valor $m=1$, es decir, igual a la masa total de la barra sin carga másica.

5.7.2.1.- Aplicación de una fuerza senoidal

Los resultados obtenidos para la fuerza senoidal de 0.2 se muestran en la Figura 5.25. Como era de esperar, se observa un comportamiento intermedio entre los que presentan la barra libre-fija y la barra libre-libre. En la Figura 5.25.a se puede ver que el desplazamiento aumenta de una forma lineal con ligeras oscilaciones, del mismo modo que en la barra libre-libre, pero con una pendiente cuyo valor es aproximadamente la mitad que en el caso de la barra libre-libre. Así mismo, en la Figura 5.25.c aparecen cambios de pendiente en el esfuerzo, pero no de forma tan abrupta como en la Figura 5.17.c.

Al aplicar la fuerza de frecuencia 1.3 (Figura 5.26) se observa que el desplazamiento también tiende a crecer con el tiempo, pero no de una manera continua sino que se producen en ciertos momentos disminuciones del valor medio de las oscilaciones del desplazamiento, producto de que la reflexión de la onda en el extremo con la carga másica no es siempre de la misma forma, sino que varía según sea la aceleración en ese extremo. Otro aspecto a destacar es el hecho de que, al no estar fijo ni el desplazamiento ni el esfuerzo en el extremo derecho, la variación espacial del desplazamiento y del esfuerzo adopta formas más libres, ya que en la barra libre-fija y

libre-libre siempre el desplazamiento era nulo en $x=1$, o su pendiente era nula, y en el caso del esfuerzo en la barra libre-fija no tiene restricciones *a priori*, pero en la barra libre-libre se anulaba en el extremo derecho.

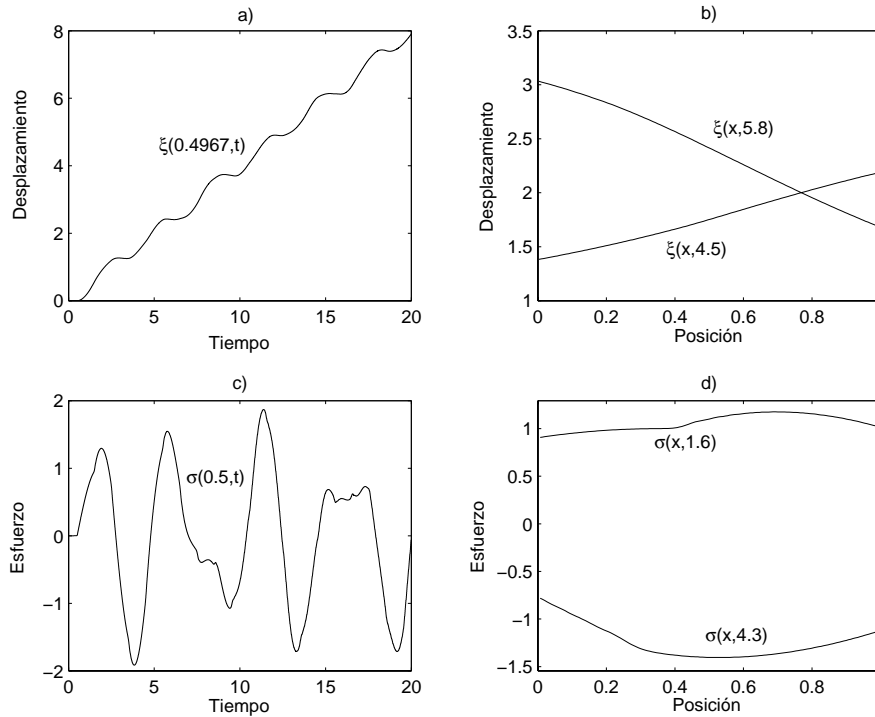


Figura 5.25. Resultados de la simulación al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=0.2$ a la barra libre-carga másica con un valor adimensional de la carga másica $m=1$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posiciones de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

Los efectos de la carga másica en la forma de reflejarse la onda en $x=1$ se aprecian mejor en la Figura 5.27, que muestra los resultados al aplicar la fuerza de frecuencia 4.85. En la Figura 5.27.a se pueden observar los cambios que se producen en la vibración al llegar a la posición considerada la onda reflejada en los extremos, de forma que en la primera y segunda llegada de la onda reflejada se produce un aumento lineal del valor medio de las oscilaciones, así como un cambio de amplitud, mientras que en la tercera y cuarta llegada, además del cambio de amplitud, el valor medio de las oscilaciones pasa a decrecer de forma lineal, para luego aumentar de nuevo en la quinta llegada. En cuanto a la variación del desplazamiento con la posición, en la Figura 5.27.b se comprueba como el desplazamiento adopta valores superiores en la parte derecha de la barra, debido a que los tiempos considerados son posteriores a la primera reflexión de

la onda, que producen un aumento general del desplazamiento en las posiciones por las que ha pasado esta onda reflejada. Por otro lado, en la Figura 5.27.c se observa que las oscilaciones del esfuerzo no mantienen una amplitud constante entre las distintas llegadas de la onda reflejada, como sucedía en las barras libre-fija y libre-libre, sino que esta amplitud varía en cada oscilación, sobre todo a partir del sexto paso de la onda reflejada.

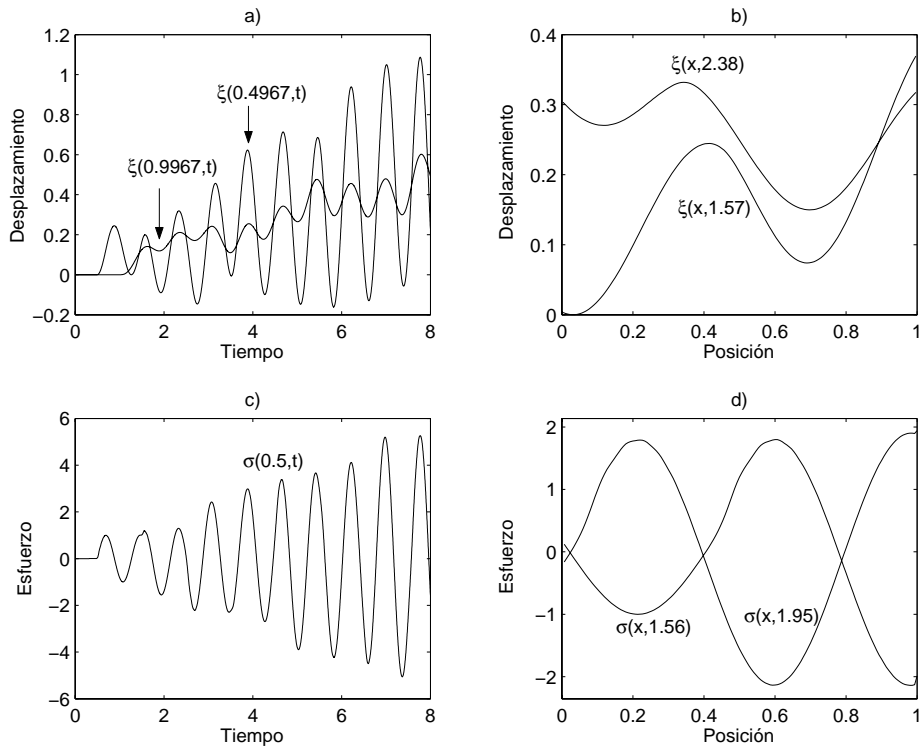


Figura 5.26. Resultados de la simulación al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=1.3$ a la barra libre-carga másica con un valor de la carga másica $m=1$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en dos posiciones de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

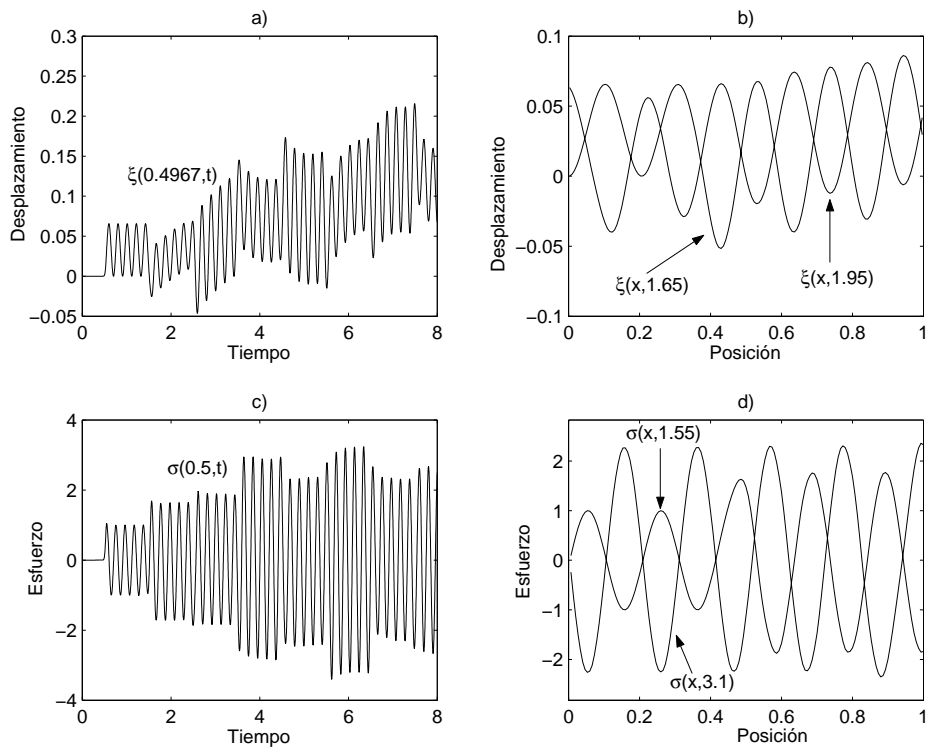


Figura 5.27. Resultados de la simulación al aplicar una fuerza senoidal con $f_a=4.85$ a la barra libre-carga másica con un valor de la carga másica $m=1$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

5.7.2.2.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

En los apartados 5.5.2.b y 5.6.2.b hemos visto como al aplicar una fuerza tipo pulso se producen oscilaciones de Gibbs en el desplazamiento y en el esfuerzo, las cuales no tienen una realidad física. A pesar del inconveniente que suponen estas oscilaciones para poder conocer e interpretar los resultados de la simulación, en las Figuras 5.28 y 5.29 se muestran los resultados de la aplicación de un pulso cuadrado y gaussiano a la barra libre-carga másica, respectivamente.

En la Figura 5.28.a se observa que el desplazamiento tiene un comportamiento “peculiar”. Después de la primera reflexión del pulso en el extremo derecho, este toma un valor nulo de forma brusca, del mismo modo que en la barra libre-fija. Sin embargo, ese valor no se mantiene constante hasta el siguiente paso del pulso, como en las barras anteriores, sino que aumenta de forma curvilínea y continua hasta el paso del pulso

reflejado, en que vuelve a cambiar de valor de manera abrupta. Así, entre los pasos del pulso, el desplazamiento no mantiene un valor fijo, sino que puede aumentar o disminuir, como se observa en la Figura 5.28.a. La única explicación para esto es que una vez que llega el pulso a la carga másica, ésta se mueva produciendo una fuerza de reacción en el extremo derecho que se transmite por la barra, alterando, por tanto, el desplazamiento producido por el pulso. En la Figura 5.28.c, en la que se muestra la variación del esfuerzo con el tiempo, se puede observar que, si no tenemos en cuenta las oscilaciones de Gibbs, el esfuerzo también cambia de valor entre cada paso del pulso. Este mismo fenómeno se puede comprobar en la Figura 5.28.b, donde se observa cómo el desplazamiento no varía con la posición de una manera brusca, según donde se encuentre el pulso en ese momento (como ocurre en la barra libre-fija y libre-libre, Figuras 5.13.b y 5.20.b), sino que aparece una curva que varía de forma suave. Así mismo, en la Figura 5.28.d se puede ver como el esfuerzo, si se considera el valor medio de las oscilaciones de Gibbs, toma valores distintos de cero en otros lugares, aparte de donde se encuentre el pulso en ese momento.

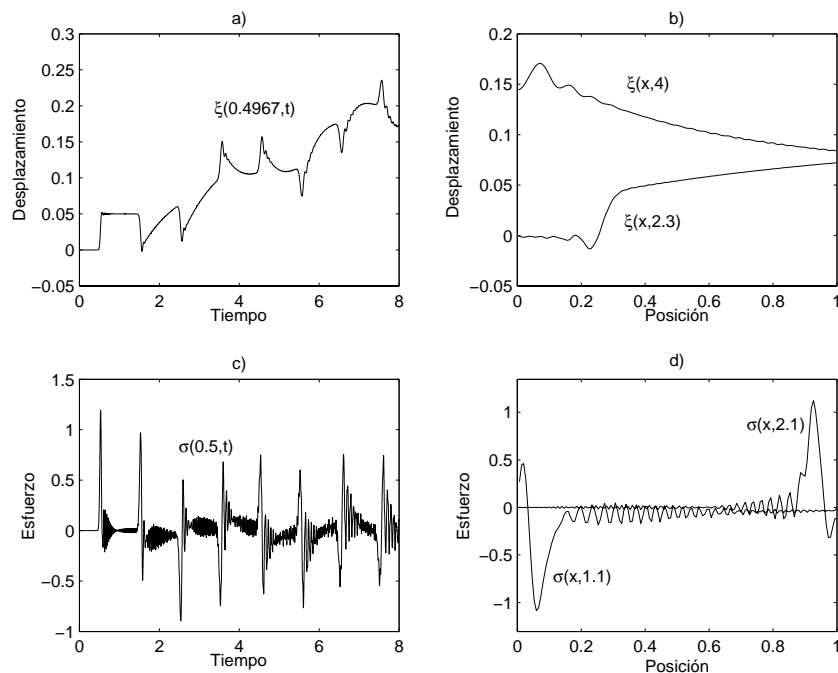


Figura 5.28. Resultados de la simulación al aplicar el pulso cuadrado a la barra libre-carga másica con un valor adimensional de la carga másica $m=1$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

Otro tema a destacar es el hecho de que aparezcan menos oscilaciones de Gibbs en el desplazamiento que en las barras libre-fija y libre-libre, debido posiblemente a que el desplazamiento no ha de mantenerse en valores fijos durante grandes intervalos de tiempo. Para el esfuerzo, sin embargo, aparecen en general las mismas oscilaciones que en las barras anteriores.

En cuanto a la respuesta de la barra al pulso gaussiano (Figura 5.29), su comportamiento es muy similar a cuando se le aplica el pulso cuadrado, y prácticamente se puede extender todo lo dicho para dicho pulso, con la única diferencia de que en este caso las oscilaciones de Gibbs son bastante más abundantes (lo que, por otra parte, sucedía también en las barras libre-fija y libre-libre).

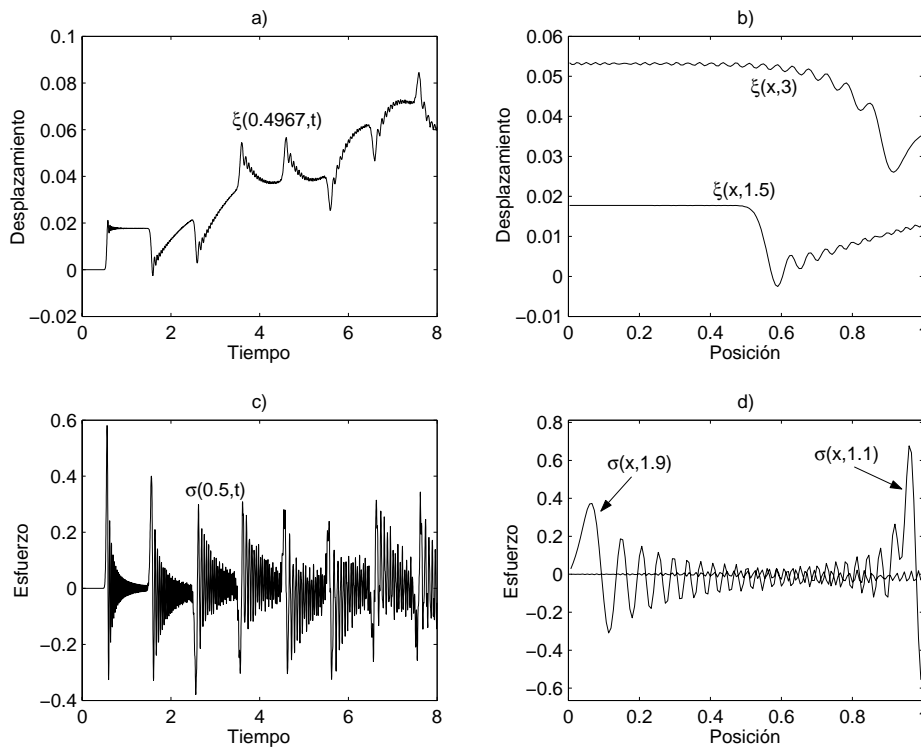


Figura 5.29. Resultados de la simulación al aplicar el pulso cuadrado a la barra libre-carga másica con un valor de la carga másica $m=1$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en una posición de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos tiempos distintos. c) Variación del esfuerzo con el tiempo en una posición de la barra. d) Variación del esfuerzo con la posición en dos tiempos distintos.

5.7.3.- Validación del modelo en red para la barra libre-carga másica

La validación del modelo en red para esta barra la hemos realizado mediante la comparación de la Transformada de Fourier de los resultados de la simulación con las frecuencias naturales teóricas de la barra libre-carga másica, obtenidas a partir de la resolución de la ecuación trascendente:

$$\text{sen}(2\pi f) + m2\pi f \cos(2\pi f) = 0 \quad (5.22)$$

Dada la forma que adopta el desplazamiento en esta barra, que tiende a aumentar con el tiempo, es preferible utilizar el espectro del esfuerzo, de esta forma se evita la componente de frecuencia cero. Así mismo, dado que la componente principal del espectro de la respuesta de la barra a una fuerza senoidal es la correspondiente a la frecuencia de la fuerza aplicada, que puede enmascarar otras componentes correspondientes a frecuencias naturales de la barra, estudiaremos únicamente el espectro del esfuerzo en la posición central de la barra al aplicarle el pulso cuadrado.

En la Figura 5.30 se representa parte del espectro en $x=0.5$ al aplicar el pulso cuadrado, en concreto los diez primeros picos. Las frecuencias correspondientes a dichos picos, así como las diez primeras frecuencias naturales de la barra, aparecen en la Tabla 5.5. En ella se puede comprobar la gran similitud existente entre las frecuencias naturales teóricas y los picos del espectro del esfuerzo, sobre todo teniendo en cuenta que, dado que el muestreo utilizado a la hora de obtener los resultados de la simulación es $T=0.001$, la resolución del espectro es $\Delta f=0.125$. Por lo tanto, comprobamos que el modelo en red se ajusta al modelo teórico de la barra libre-carga másica, proporcionando resultados correctos.

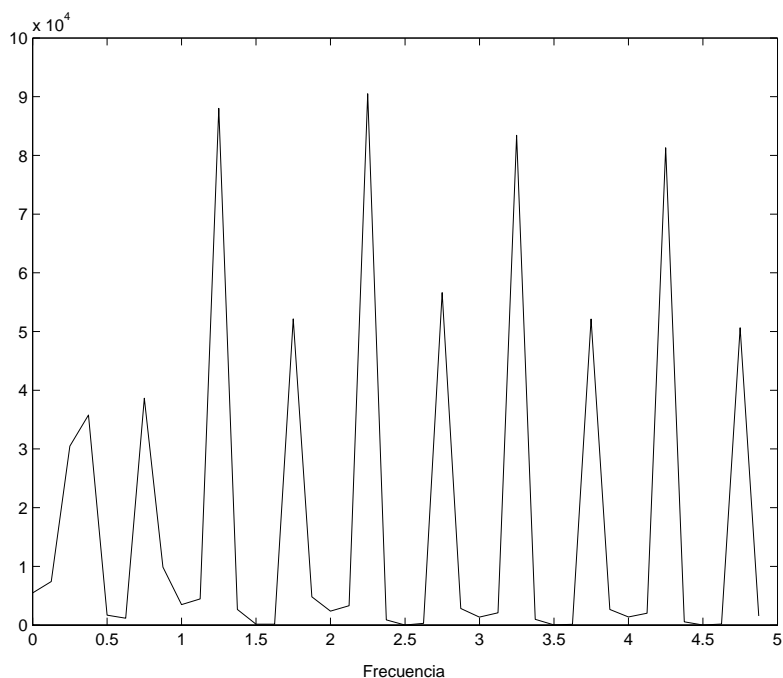


Figura 5.30. Espectro del esfuerzo en $x=0.5$ al aplicar el pulso cuadrado a la barra libre-carga másica.

Posición de los picos del espectro	0.375	0.750	1.250	1.750	2.250	2.750	3.250	3.750	4.250	4.750
Frecuencias naturales teóricas	0.323	0.782	1.270	1.764	2.261	2.759	3.258	3.757	4.256	4.755

Tabla 5.5. Comparación entre las frecuencias de los picos de la Figura 5.30 y las frecuencias naturales de la barra libre-carga másica.

5.8.- Conclusiones del capítulo

Este capítulo se ha dedicado a la elaboración de la celda elemental del MSR para las vibraciones longitudinales en barras, el diseño de los modelos en red de una barra con cuatro tipos de condiciones de contorno distintas (fija-fija, libre-fija, libre-libre y libre-carga másica), la validación de dichos modelos en red mediante la comparación con las expresiones teóricas y el estudio de la respuesta de la barra libre-carga másica cuando es sometida a una fuerza senoidal y tipo pulso.

El diseño de la celda elemental y de los modelos en red, objetivo principal del capítulo, ha demostrado ser adecuado, ya que la validación ha sido buena en todos los casos. Al trabajar con vibraciones libres o con vibraciones forzadas cuando se aplica una fuerza senoidal de baja y media frecuencia los resultados han sido muy buenos. Aparecen pequeñas diferencias de amplitud entre los resultados de la simulación y las soluciones teóricas al aplicar la fuerza senoidal de alta frecuencia, así como oscilaciones de Gibbs al aplicar las fuerzas tipo pulso, aunque son asumibles dentro de su contexto y, en el caso de las fuerzas tipo pulso, fácilmente identificables, por lo que no deben llevar a confusiones.

El comportamiento de las vibraciones forzadas de la barra libre-carga másica es, como era de esperar, intermedio entre el de la barra libre-fija y libre-libre, aunque de ninguna manera se podría deducir a partir de los resultados de dichas barras. Así, la manera en que el desplazamiento y el esfuerzo varían su vibración entre los distintos pasos de la onda reflejada es algo específico de esta barra y un fenómeno interesante.

REFERENCIAS

- [5.1] C.F. González-Fernández, F. Alhama, J.F. López-Sánchez, J. Horno “Application of the network method to heat conduction processes with polynomial and potential-exponentially varying thermal properties”. *Numerical Heat Transfer A, Applications*, 33, pp. 549-559 (1998).
- [5.2] M. Alarcón “Transporte de calor en sistemas con aletas. Coeficientes de rendimiento y red de transferencia”. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena (2001).
- [5.3] F. Alhama “Estudio de respuestas térmicas transitorias en procesos no lineales de conducción de calor mediante el Método de Simulación por Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia (1999).
- [5.4] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Determination of the specific heat versus temperature under natural convection boundary condition using the network simulation method”. *Eurotherm Seminar N° 68* (2001).
- [5.5] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Analysis of laminar forced convection with Network Simulation Method in thermal entrance region of ducts”. *International Journal of Thermal Sciences*, 43, pp. 443-451 (2004).
- [5.6] A. Moya “Estudio de procesos de transporte iónico en células electroquímicas mediante el Método de Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1996).
- [5.7] J. Castilla, M.T. García-Hernández A. Hayas, J. Horno “Simulation of non-stationary electrodiffusion processes in charged membranes by the network approach”. *Journal of Membrane Science*, 116, pp. 107-116 (1996).
- [5.8] M.T. García Hernández “Simulación digital de procesos de electrodo. Método de redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1994).
- [5.9] M.T. García-Hernández, J. Castilla, C.F. González-Fernández, J. Horno “Application of the network method to simulation of a square scheme with Butler-Volmer charge transfer”. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 424, pp. 207-212 (1997).

- [5.10] J.J. López-García, A.A. Moya, J. Horno, A. Delgado and F. González-Caballero “A network model of the electrical double layer around a colloid particle”. *Journal of Colloid and Interface Science*, 183, pp. 124-130 (1996).
- [5.11] A.J. Poza, J.J. López-García, A. Hayas, J. Horno “A network simulation method for numerical solution of the nonlinear Poisson-Boltzmann equation for a spheroidal surface”. *Journal of Colloid and Interface Science*, 219, pp. 241-249 (1999).
- [5.12] A.J. Poza “Estudio del efecto de la excentricidad de las partículas cargadas sobre las propiedades eléctricas de suspensiones coloidales mediante el método de simulación por redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (2000).
- [5.13] V. Zimmerman, C. Grosse “Numerical calculation of the dielectric spectra of cell-type particles”. *Journal of Physical Chemistry B*, 108, pp. 12617-12622 (2004).
- [5.14] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Análisis de la propagación de ondas elásticas por el método de resolución por redes”. XXVIII Reunión Biental de la Real Sociedad Española de Física y 11º Encuentro Ibérico para la Enseñanza de la Física, Anexo pp. 5-7, Sevilla, España (2001).
- [5.15] M.T. García-Hernández, E. Castro, A. Gallego “Vibraciones longitudinales en barras: Simulación con el método de redes”. II Encuentro del Grupo Latinoamericano de Emisión Acústica y Primero Iberoamericano. 1, pp. 49-56, Buenos Aires, Argentina (2001).
- [5.16] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Networks simulation method applied to vibration of rods”. *Forum Acusticum*. Actas del congreso, Sevilla, España (2002).

CAPITULO 6

SIMULACIÓN DE VIBRACIONES TRANSVERSALES EN BARRAS CON EL MSR

6.1.- Introducción

En este capítulo se estudia la simulación de vibraciones transversales en barras mediante el MSR. La primera parte se dedica al modelo de Euler-Bernoulli, mientras que la segunda se centra en el de Timoshenko. Dado que las ecuaciones del movimiento de estos modelos difieren notablemente de la ecuación de las vibraciones longitudinales, el primer paso al estudiar cada modelo consistirá en la elaboración de la celda elemental del modelo en red correspondiente a cada uno de ellos. Posteriormente, dada la novedad que suponen esas celdas, se validarán mediante la simulación de las vibraciones forzadas en una barra apoyada en los dos extremos, comparando los resultados con las expresiones analíticas del Capítulo 3. Para finalizar el estudio con cada modelo, se

mostrarán los resultados para una barra con un extremo amordazado y con el otro cargado con una masa puntual.

6.2.- Modelo de Euler-Bernoulli

6.2.1.- Celda elemental

La ecuación de las vibraciones transversales en el modelo de Euler-Bernoulli es:

$$\frac{\partial^4 y'}{\partial x'^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} = 0 \quad a^2 = \frac{EI}{\rho S} \quad (6.1)$$

La primera elección que hay que realizar es determinar qué variables del modelo matemático se van a hacer corresponder con las variables potencial y flujo del MSR. La elección de la variable potencial es obvia: el desplazamiento transversal y' . Pero la elección de la variable flujo plantea más dudas. En todos los procesos físicos estudiados hasta ahora con el MSR [6.1-6.15], se ha hecho corresponder la variable flujo con $\partial y' / \partial x'$, por lo que, en un primer momento, esta parece la elección más natural y lógica. Sin embargo, los modelos en red construidos con esta variable flujo no proporcionan unos resultados adecuados, por lo que es necesario desestimarla. Además, en este modelo matemático, la variable $\partial y' / \partial x'$ no tiene ningún significado físico, por lo que esta definición del flujo es algo artificial. Para la obtención de una celda elemental que proporcione resultados correctos, es necesario partir de la siguiente forma de la ecuación del movimiento:

$$\frac{\partial V'}{\partial x'} = \rho S \frac{\partial^2 y'(x', t')}{\partial t'^2} \quad (6.2)$$

donde se ve que si se hace corresponder la variable flujo con la fuerza transversal V' , obtendremos una forma de la celda elemental parecida a la obtenida para las vibraciones longitudinales (ver Figura 5.1). La correspondencia de la variable flujo con la fuerza no es una novedad en sí misma, ya que en la mayoría de los casos se intenta hacer corresponder la variable flujo con una variable vectorial que aparezca en el modelo matemático, y es similar a la correspondencia establecida entre flujo y esfuerzo en las vibraciones longitudinales. Sin embargo, la novedad en esta ocasión es que en la

ecuación constitutiva del modelo, V' depende de la tercera derivada espacial de y' , por lo que la relación habitual entre las variables potencial y flujo es bastante distinta. Esto es algo que no había aparecido hasta ahora en la bibliografía debido a que no se había aplicado el MSR a un problema en el que apareciera una ecuación diferencial con un orden tan alto, y, una de las aportaciones de este apartado, es determinar que, si se tiene una ecuación del movimiento parecida a la ecuación (6.2), es preferible hacer corresponder el flujo con la variable física que sea equivalente a V' , en lugar de hacerlo corresponder a $\partial y'/\partial x'$.

Así pues, para la aplicación del MSR hacemos corresponder el desplazamiento transversal con la variable potencial y la fuerza transversal con la variable flujo:

$$\Phi \rightarrow y' \qquad J \rightarrow V' \qquad (6.3)$$

siendo la relación entre potencial y flujo:

$$EI \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x'^3} = J \qquad (6.4)$$

y la ecuación del movimiento:

$$\frac{\partial J}{\partial x'} = \rho S \frac{\partial^2 \Phi(x', t')}{\partial t'^2} \qquad (6.5)$$

que es el punto de partida para la elaboración de la celda elemental.

La ecuación (6.5) es muy similar a la (5.5), que sirve de base para la celda elemental de las vibraciones longitudinales. Así pues, el desarrollo de la celda elemental de este apartado es formalmente igual al del apartado 5.2. En primer lugar, se discretiza la barra en N celdas de tamaño $\Delta x'$, y se aproxima por diferencias finitas la derivada espacial que aparece en la ecuación (6.5), con lo que nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en el que cada ecuación corresponde a una celda:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{J_{i+\Delta} - J_{i-\Delta}}{\Delta x'} + \rho S \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} \right\} = 0 \qquad (6.6)$$

donde Φ_i es el potencial en la celda i , $J_{i+\Delta}$ el flujo que circula a la derecha de la celda i y $J_{i-\Delta}$ el flujo que circula a la izquierda de la celda i . Al igual que en la Sección 5.2, se expresa esta ecuación en la forma:

$$J_{i-\Delta} - J_{i+\Delta} - \Delta x' \rho S \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} = 0 \quad (6.7)$$

y se define:

$$J_{\gamma i} = \Delta x' \rho S \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t'^2} \quad (6.8)$$

por lo que la ecuación (6.7) se puede considerar como un balance de los flujos que entran y salen de la celda i , de acuerdo con la ley de corrientes de Kirchhoff:

$$J_{i-\Delta} - J_{i+\Delta} + J_{\gamma i} = 0 \quad (6.9)$$

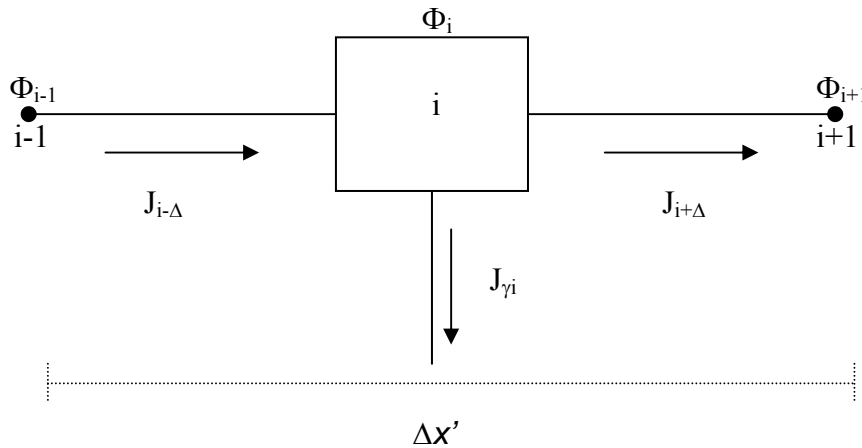


Figura 6.1. Esquema de la celda elemental.

donde los flujos $J_{i\pm\Delta}$ vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} J_{i+\Delta} &= EI \frac{\Phi_{i+2} - 3\Phi_{i+1} + 3\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x'^3} \\ J_{i-\Delta} &= EI \frac{\Phi_{i+1} - 3\Phi_i + 3\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}}{\Delta x'^3} \end{aligned} \quad (6.10)$$

La forma de los flujos $J_{i\pm\Delta}$ es bastante más compleja que en el caso de las vibraciones longitudinales, por lo que no basta con colocar una simple puerta resistiva entre i e $i\pm 1$, sino que es necesario utilizar una fuente de flujo controlada por los cuatro potenciales implicados en cada caso cuya salida sea la dada por (6.10).

El flujo J_{yi} se obtiene a partir del potencial Φ_i , de la misma manera que en las vibraciones longitudinales, mediante la utilización de una fuente de flujo controlada por el potencial suministrado por los dos circuitos auxiliares de Figura 6.3, con la diferencia de que ahora $C=I=(\rho S\Delta x')^{1/2}$. Así pues, en la Figura 6.2 se muestra la celda elemental para las vibraciones transversales con el modelo de Euler-Bernoulli [6.17].

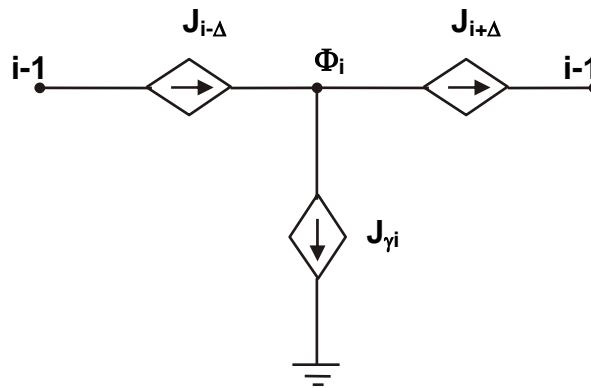


Figura 6.2. Celda elemental de las vibraciones transversales en el modelo de Euler-Bernoulli.

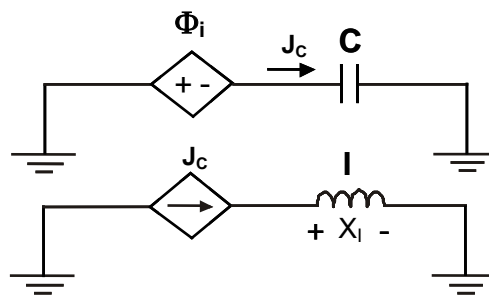


Figura 6.3. Circuitos auxiliares de la celda elemental para J_{yi} .

La influencia de las características físicas de la barra en los parámetros de la celda elemental es muy similar a la que aparece en las vibraciones longitudinales. El módulo de Young y el momento de inercia transversal afectan a la relación entre el flujo y el potencial, apareciendo en las fuentes de flujo que conectan los diferentes puntos de

la red. La densidad y el área de la sección transversal de la barra afectan al valor de la capacidad y la inducción de los circuitos auxiliares, los cuales, por tanto, siguen recogiendo la información sobre el comportamiento inercial de la barra.

Como se dijo en la Sección 5.2, una vez diseñada la celda elemental, el modelo en red se construye mediante la conexión de las N celdas en las que se ha dividido la barra, y la incorporación de las condiciones de contorno. Un aspecto a destacar es que, en este caso, las fuentes de flujo que proporcionan $J_{i\pm\Delta}$ conectan directamente los nodos i , $i-1$ e $i+1$, sin que haya nodos intermedios entre ellos, como ocurre en las vibraciones longitudinales. Así, como se muestra en la Figura 6.4, la fuente que proporciona $J_{i-\Delta}$ y que se encuentra a la izquierda del nodo i , es la misma que proporciona $J_{i-1+\Delta}$ y que está situada a la derecha del nodo $i-1$. Por lo tanto, la forma en que están estructuradas las celdas elementales es ligeramente diferente a como lo están en las vibraciones longitudinales, lo que ocasiona que, si el ancho de cada celda es $\Delta x'$, en este caso los nodos se encuentran en la posición $x'=i\Delta x'$. Al realizar las simulaciones se ha vuelto a trabajar con $N=150$, por lo que el ancho de la celda vuelve a ser $\Delta x'=1/150=0.0067$.

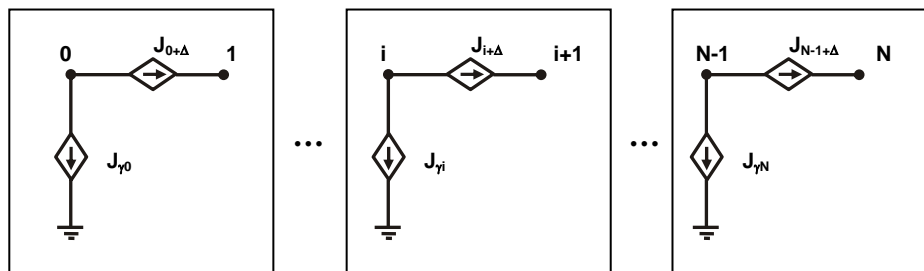


Figura 6.4. Conexión de las N celdas elementales.

6.2.2.- Celda elemental con variables adimensionales

La celda elemental con variables adimensionales es formalmente idéntica a la celda elemental de las Figuras 6.2 y 6.3, lo único que cambia es el valor de los parámetros del circuito. Para determinar el valor de estos parámetros, consideremos la ecuación adimensional de las vibraciones transversales:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (6.11)$$

con la ecuación constitutiva

$$V = \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \quad (6.12)$$

A partir de estas ecuaciones se tiene que la relación entre variables dimensionales y adimensionales es:

Desplazamiento Transversal	Tiempo	Posición	Fuerza Transversal	Momento de Torsión
$y=y'/L$	$t=at'/L^2$	$x=x'/L$	$V=V'/(EI)$	$M=M'/(EI)$

Tabla 6.1. Relación entre variables dimensionales y adimensionales.

Así, los parámetros de la celda elemental adimensional resultan ser:

$$C = \sqrt{\Delta x} \quad I = \sqrt{\Delta x} \quad (6.13)$$

$$J_{i+\Delta} = \frac{\Phi_{i+2} - 3\Phi_{i+1} + 3\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x^3}$$

$$J_{i-\Delta} = \frac{\Phi_{i+1} - 3\Phi_i + 3\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}}{\Delta x^3} \quad (6.14)$$

6.2.3.- Barra apoyada en los dos extremos

6.2.3.1.- Modelo en red

Las condiciones de contorno de esta barra son:

$$y(0,t)=0 \quad y(1,t)=0 \quad M(0,t)=0 \quad M(1,t)=0 \quad (6.15)$$

En las vibraciones transversales se tienen dos condiciones de contorno por extremo, el doble que en las vibraciones longitudinales, lo que hace que, en principio su implementación sea más compleja. Las condiciones de contorno relativas al desplazamiento se implementan conectando los extremos a tierra, de forma que el potencial en ellos es nulo. La implementación de las condiciones relativas al momento de torsión es más complicada, ya que este no tiene correspondencia con ninguna variable del modelo en red. Así, es necesario tener en cuenta la relación entre M e y :

$$M = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6.16)$$

que se puede aproximar como

$$M_i \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (6.17)$$

por lo que en los extremos tendremos que:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{\Delta x^2} = 0 \\ M_N &= \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{\Delta x^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Como por las condiciones de contorno se tiene que $y_0=y_N=0$, las relaciones anteriores quedan en la forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_{-1} \\ y_{N+1} &= -y_{N-1} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Estas relaciones entre variables de la barra debidas a las condiciones de contorno se integran en el modelo en red mediante las fuentes de flujo de los extremos, de forma que su salida debe ser:

$$\begin{aligned} J_{0+\Delta} &= \frac{\Phi_2 - 2\Phi_1}{\Delta x^3} \\ J_{N-1+\Delta} &= \frac{2\Phi_{N-1} - \Phi_{N-2}}{\Delta x^3} \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.2.3.2.- Simulación de vibraciones libres

El primer paso en la validación del MSR a la hora de simular vibraciones transversales es la comprobación de los resultados obtenidos al simular la vibración resultante de imponer condiciones iniciales en la barra. Dado que este fenómeno, en principio, es menos exigente para un método numérico que el de las vibraciones forzadas, nos hemos limitado a estudiar un solo caso, la imposición como condiciones iniciales en el desplazamiento del primer modo de vibración, de forma que la vibración resultante será un seno de frecuencia igual a la primera frecuencia natural de la barra.

Así, las condiciones iniciales son:

$$y(x,0)=\text{sen}(\pi x) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x,0} = 0 \quad (6.21)$$

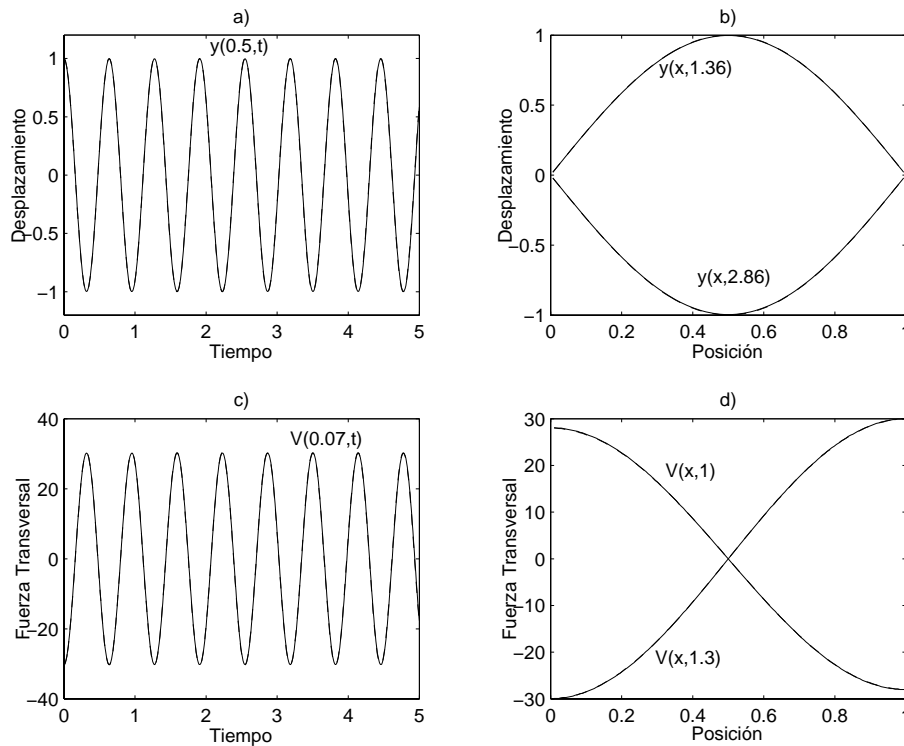


Figura 6.5. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al imponer como condiciones iniciales el primer modo de vibración en la barra simplemente apoyada. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

En la Figura 6.5 se muestran los resultados obtenidos al simular este caso con el MSR. No hay mucho que comentar sobre estos resultados, ya que las figuras obtenidas son las funciones armónicas esperadas, y las soluciones analíticas coinciden con los resultados numéricos de la simulación.

6.2.3.3.- Simulación de vibraciones forzadas

a.- Aplicación de una fuerza senoidal

Como dijimos en el Capítulo 5, la característica más importante que determina el comportamiento de la barra al aplicar una fuerza armónica es la relación de la

frecuencia de la fuerza aplicada con las frecuencias naturales, ya que una frecuencia aplicada muy alta en comparación con las frecuencias naturales producirá cambios en el desplazamiento más bruscos y activará las frecuencias naturales altas, mientras que si la frecuencia aplicada es baja, el desplazamiento será más suave y se activarán las frecuencias naturales más bajas. En este apartado hemos estudiado la aplicación de la fuerza armónica, en la posición $x_0=0.5$, con dos frecuencias distintas:

- $f_a=\pi$, que se encuentra entre la primera frecuencia natural, $f_1=\pi/2$, y la segunda, $f_2=2\pi$.

- $f_a=7$, que se encuentra entre la tercera frecuencia natural, $f_3=9/2$, y la cuarta, $f_4=8$.

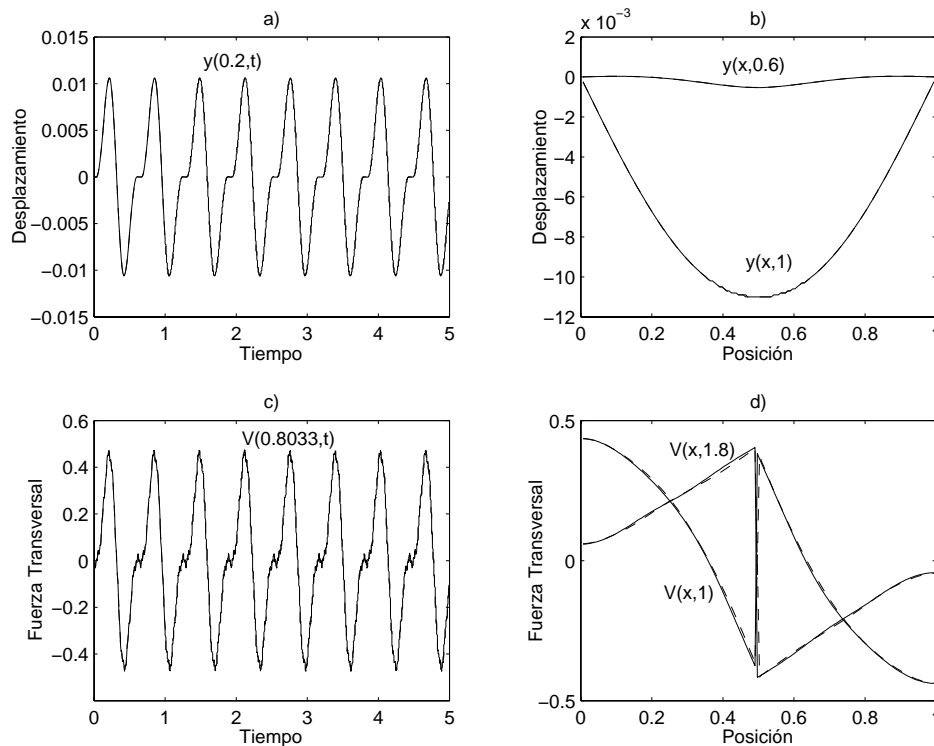


Figura 6.6. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x_0=0.5$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Los resultados obtenidos al aplicar la fuerza de frecuencia π se muestran en la Figura 6.6. Se puede observar que la variación con el tiempo del desplazamiento y el

esfuerzo se produce principalmente con la frecuencia de la fuerza aplicada, siendo la variación del esfuerzo ligeramente más irregular que la del desplazamiento. En cuanto a la variación con la posición, la del desplazamiento es de forma senoidal, con dos nodos en los extremos (debido a las condiciones de contorno) y un vientre en el centro, mientras que la del esfuerzo tiene dos zonas diferenciadas con formas antisimétricas con relación al punto de aplicación de la fuerza, donde presenta una discontinuidad. En cuanto a la comparación entre resultados numéricos y soluciones analíticas, sus gráficas coinciden en todos los casos, salvo en la variación del esfuerzo con la posición, donde aparecen ciertas diferencias en la zona cercana al punto de aplicación de la fuerza.

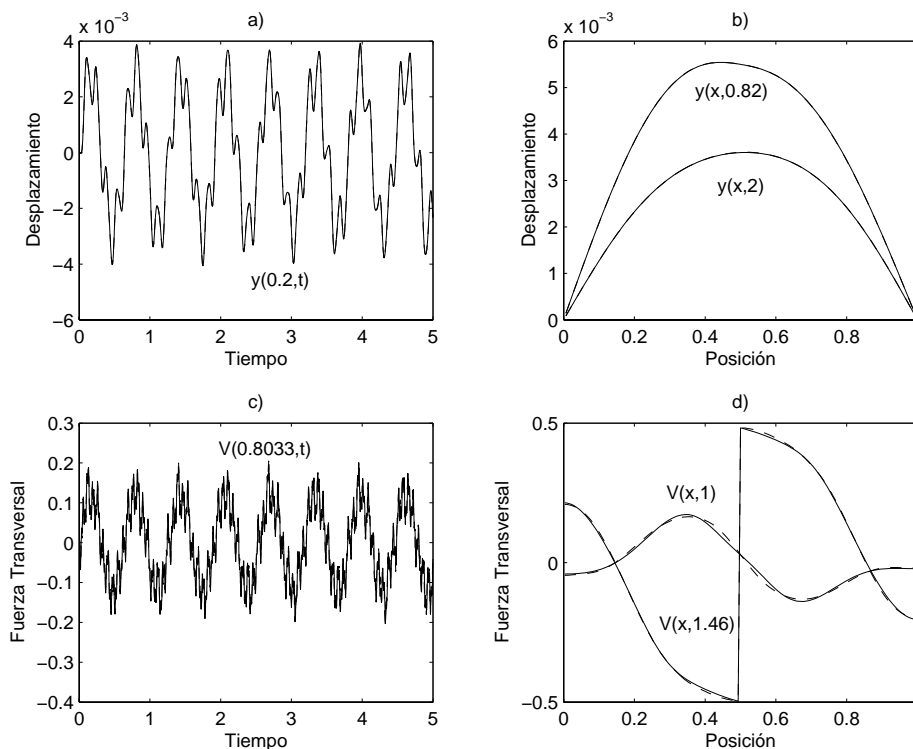


Figura 6.7. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 7 en $x_0=0.5$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

La aplicación de la fuerza de frecuencia 7 (Figura 6.7) produce una variación del desplazamiento con el tiempo mucho más irregular que al aplicar la de frecuencia π o que las que aparece al estudiar las vibraciones longitudinales. En este caso la forma del movimiento no sigue una pauta, como ocurría en los casos anteriores, sino que los

detalles de la forma cambian en cada oscilación. Esto implica, entre otras cosas, que en este movimiento intervengan varias frecuencias naturales de la barra, que se activan por la aplicación de una fuerza armónica de una frecuencia relativamente alta. La variación espacial del desplazamiento vuelve a presentar un vientre en el centro, lugar de aplicación de la fuerza, y dos nodos en los extremos, lo que indica que no depende en gran medida de la frecuencia de la fuerza aplicada. La variación de la fuerza transversal con el tiempo presenta un carácter aún más irregular, en el que intervienen más frecuencias naturales y de valor más alto, mientras que la variación con la posición sigue teniendo la misma forma.

Para el desplazamiento los resultados de la simulación coinciden con los teóricos, tanto en la variación con el tiempo como en la espacial. Sin embargo, aparecen pequeñas diferencias en la fuerza transversal, debido a sus variaciones temporales más abruptas.

b.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

En este apartado estudiamos las dos fuerzas tipo pulso consideradas en este trabajo, la pulso cuadrado y la pulso gaussiano, cuyas expresiones se introdujeron en el Capítulo 3:

$$\text{Pulso cuadrado} \quad F_{TPc} = A\delta(x-x_0)p(t) \quad (6.22)$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\text{Pulso gaussiano} \quad F_{TPg} = A\delta(x-x_0)g(t) \quad (6.24)$$

$$g(t) = \exp[-m^2(t-t_1)^2] \quad (6.25)$$

En la Figura 6.8 se pueden ver los resultados obtenidos al simular la aplicación del pulso cuadrado, con $t_1=0.05$ y $A=1$, en $x_0=0.5$. El desplazamiento varía con el tiempo de una forma regular, con pocas frecuencias naturales implicadas y no muy altas, al contrario de lo que ocurre con la fuerza transversal, que presenta una variación temporal muy irregular, más aún de la que aparecía al aplicar la fuerza armónica de 7, y con frecuencias muy altas. La variación espacial presenta rasgos distintos de los que

aparecían con la fuerza armónica, ya que el desplazamiento sigue teniendo un vientre en el centro, pero tiene una forma de campana de Gauss en lugar de la forma senoidal vista anteriormente, mientras que el esfuerzo si tiene una forma senoidal, aunque con un nodo en el centro en lugar de una discontinuidad. En el desplazamiento la simulación presenta resultados acordes con la solución teórica, pero en la fuerza aparecen diferencias importantes, de nuevo debidas al gran número de frecuencias naturales implicadas, de forma que los resultados no son muy exactos, aunque siguen la forma de la vibración.

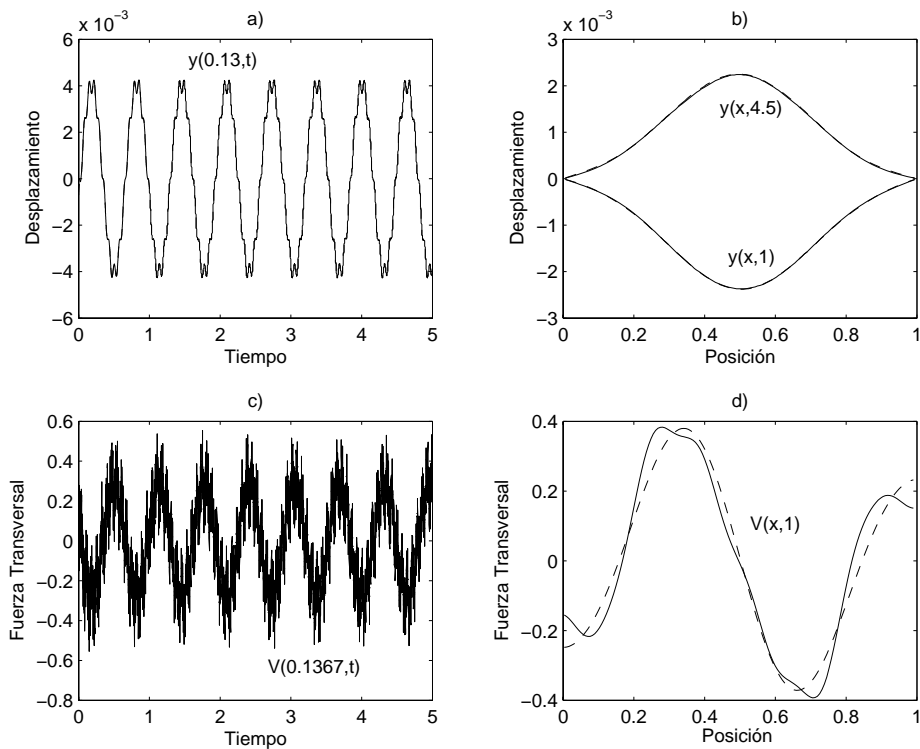


Figura 6.8. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso cuadrado en $x_0=0.5$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Al aplicar el pulso gaussiano (Figura 6.9) aumentan las frecuencias implicadas, de forma que la variación temporal del desplazamiento, aunque tiene una forma regular y periódica con el tiempo, presenta oscilaciones de frecuencia media-alta. Su variación espacial vuelve a tener una forma gaussiana, aunque menos marcada que la de la Figura 6.8. La fuerza transversal sigue variando de una forma muy abrupta con el tiempo y con muchas oscilaciones de muy alta frecuencia. Su variación espacial sigue siendo de carácter senoidal. La aparición de oscilaciones de alta frecuencia en el desplazamiento produce que en los picos de estas aparezcan pequeñas diferencias entre la simulación y la solución teórica, diferencias que también aparecen en la variación espacial. En la fuerza transversal estas diferencias son ya muy importantes, sobre todo al estudiar la variación espacial, de forma que los resultados de la simulación y los teóricos, aunque tienen la misma forma, apenas coinciden.

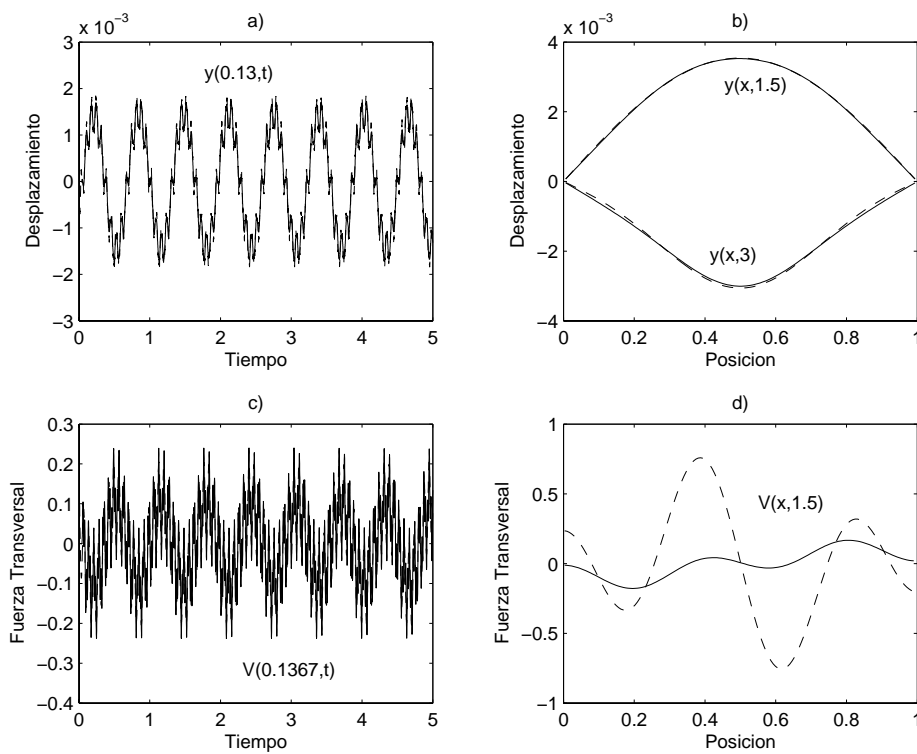


Figura 6.9. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso gaussiano en $x_0=0.5$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en un instante de tiempo.

6.2.4.- Barra con un extremo amordazado y otro con una masa puntual

6.2.4.1.- Modelo en red

Las condiciones de contorno de esta barra son:

$$y(0,t)=0 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{0,t} = 0 \quad M(1,t)=0 \quad V(1,t) = m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \quad (6.26)$$

La primera condición de contorno es la más fácil de implementar, ya que se consigue simplemente conectando el primer nodo a tierra. Para la segunda condición es necesario adoptar una estrategia similar a la de la Sección 6.2.3.1 y aproximar por diferencias finitas la derivada espacial de y :

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \quad (6.27)$$

Así, en el extremo izquierdo de la barra, nodo cero del modelo en red, se cumple la relación:

$$\Phi_{-1} = \Phi_1 \quad (6.28)$$

por lo que esta condición de contorno se implementa imponiendo que la fuente de flujo que conecta el nodo cero con el uno tenga la expresión:

$$J_{0+\Delta} = \frac{\Phi_2 - 4\Phi_1}{\Delta x^3} \quad (6.29)$$

para lo que se debe imponer que:

$$\Phi(J_{0+\Delta}) = \Phi_2 - 4\Phi_1 \quad (6.30)$$

La condición de contorno $M(1,t)=0$ produce que en el extremo derecho se tenga que:

$$M_N = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{N+1} = 2y_N - y_{N-1} \quad (6.31)$$

Así que la fuente de flujo $J_{N-1+\Delta}$ tiene la expresión:

$$J_{N-1+\Delta} = \frac{-\Phi_N + 2\Phi_{N-1} - \Phi_{N-2}}{\Delta x^3} \quad (6.32)$$

que se consigue imponiendo que:

$$\Phi(J_{N-1+\Delta}) = -\Phi_N + 2\Phi_{N-1} - \Phi_{N-2} \quad (6.33)$$

Por último, la condición de contorno sobre $V(1,t)$ se impone de la misma forma que se consigue el flujo J_{yi} , mediante una fuente de flujo controlada por la fuerza suministrada por los circuitos auxiliares de la Figura 6.11, siendo el valor de los parámetros $C_m = I_m = m^{1/2}$.

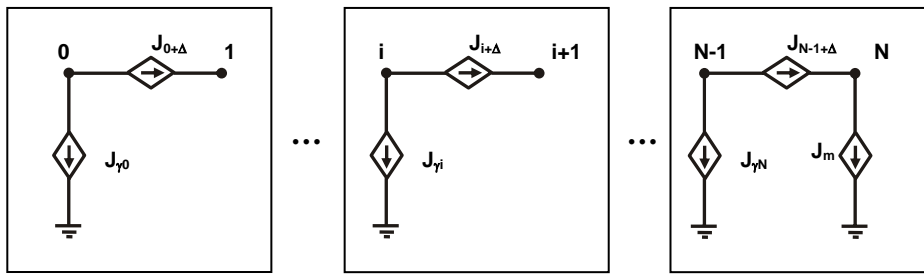


Figura 6.10. Modelo en red para la barra amordazada-carga másica.

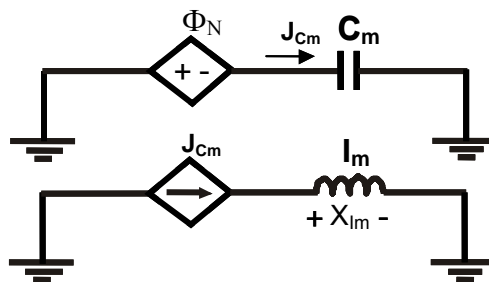


Figura 6.11. Circuitos auxiliares para la obtención de J_m .

6.2.4.2.- Simulación de vibraciones forzadas

En esa sección se estudia el movimiento vibratorio resultante de la aplicación de los distintos tipos de fuerza considerados en el centro de la barra amordazada-carga másica, con $m=1$.

a.- Aplicación de una fuerza senoidal

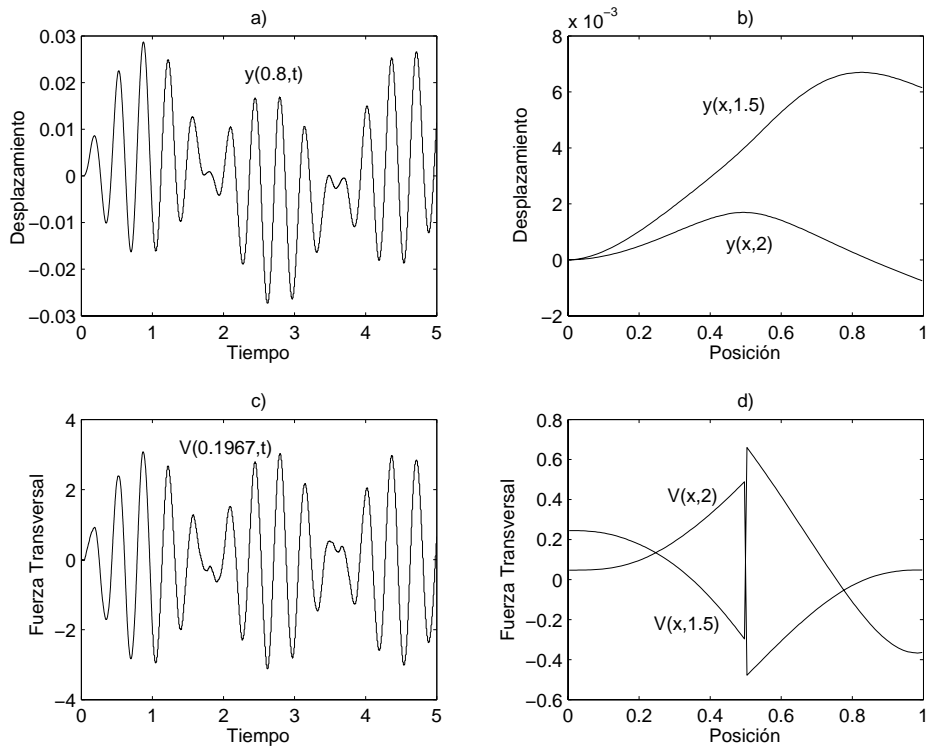


Figura 6.12. Resultados de la aplicación de la fuerza armónica de frecuencia π a la barra amordazada-carga másica, con $m=1$, en $x_0=0.5$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Los resultados obtenidos al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x_0=0.5$ se muestran en la Figura 6.12. Se puede ver que en este caso el comportamiento de las variables físicas es muy distinto del que tenían sus variables equivalentes en las vibraciones longitudinales al estudiar la barra libre-carga másica, ya que ahora no se produce un crecimiento ilimitado del desplazamiento, debido a que esta barra si tiene ligaduras en $x=0$ que impiden su movimiento como sólido rígido. Sin embargo, en el desplazamiento es posible apreciar la influencia de la carga másica en la vibración, ya que hay tres grupos de oscilaciones diferenciados que vibran alrededor de una posición central que no es el valor cero de desplazamiento, y que varía de forma regular. Como era de esperar, el extremo derecho de la barra no se encuentra fijo sino que sufre también un movimiento vibratorio, lo que origina que en esta barra el máximo del desplazamiento no se encuentre en el centro de la barra (el lugar de aplicación de la fuerza) sino que este máximo cambie de posición desplazándose a lo largo de ella. En

cuanto al esfuerzo, su variación temporal presenta también tres grupos de oscilaciones diferenciados, pero con la diferencia de que aquí sí oscilan alrededor del valor de fuerza cero. Su variación espacial presenta una forma similar a la de la Figura 6.6.d, con dos zonas separadas por una discontinuidad en el centro, pero con la diferencia de que ahora estas dos zonas no son perfectamente antisimétricas.

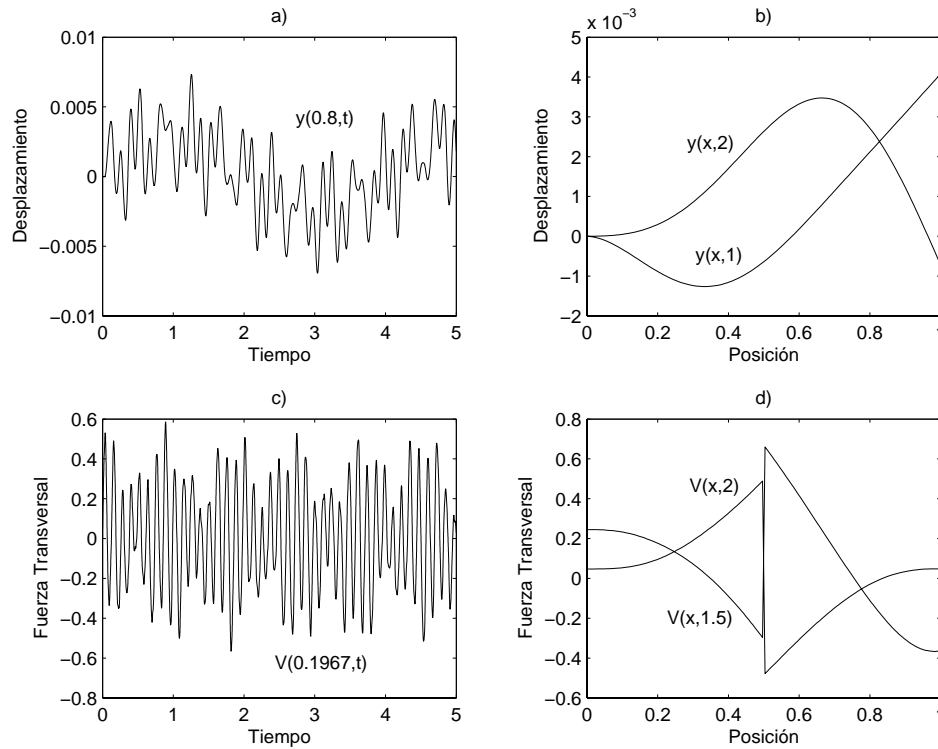


Figura 6.13. Resultados de la aplicación de la fuerza armónica de frecuencia 7 a la barra amordazada-carga másica, con $m=1$, en $x_0=0.5$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Al aplicar la fuerza de frecuencia 7 (Figura 6.13), la variación temporal del desplazamiento se vuelve más irregular y abrupta, sin que ahora aparezcan grupos

diferenciados de oscilaciones, pero apreciándose una oscilación general del valor medio de las oscilaciones a una frecuencia relativamente baja. Esta oscilación general aparece también en la fuerza transversal, aunque aquí es menos marcada y con una frecuencia algo mayor. En cuanto a la variación espacial de estas magnitudes, sigue el mismo patrón que el de la Figura 6.12.

b.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

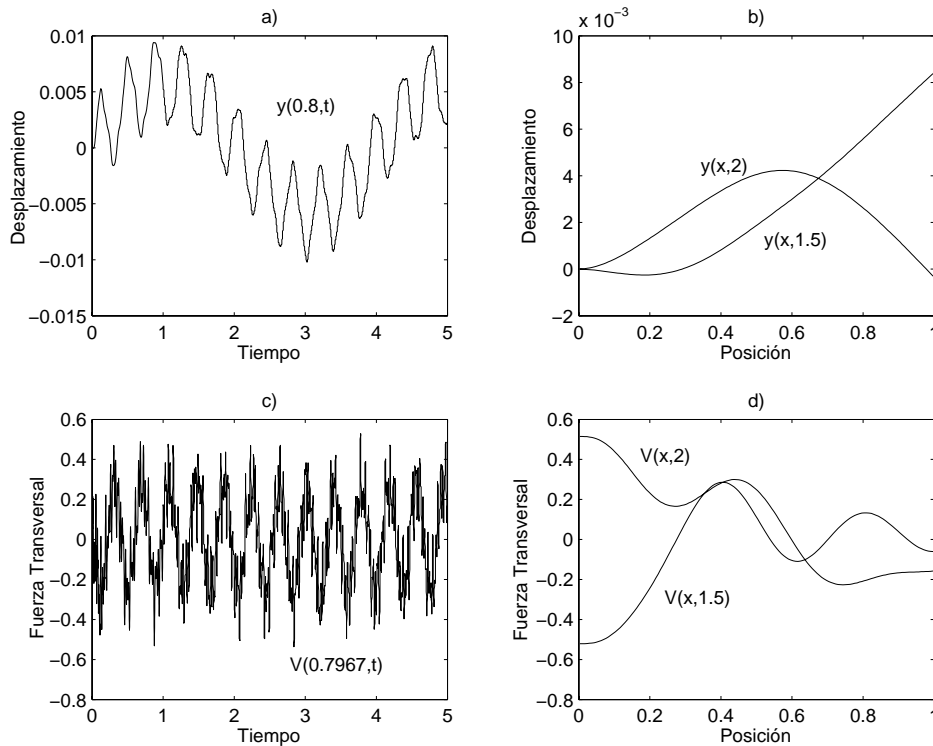


Figura 6.14. Resultados de la aplicación de la fuerza tipo pulso cuadrado a la barra amordazada-carga másica, con $m=1$, en $x=0.5$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

La aplicación de la fuerza tipo pulso cuadrado (Figura 6.14) produce una variación temporal del desplazamiento en la que predominan dos frecuencias, una más alta que produce oscilaciones con un periodo mayor que las que aparecían al aplicar las fuerzas armónicas, y una más baja que produce una oscilación general similar a la que aparece en la Figura 6.13, por lo que esto parece ser una característica del movimiento transversal de este tipo de barra. La fuerza transversal tiene un comportamiento parecido, con una oscilación general a una frecuencia mayor que la que tiene el desplazamiento, y oscilaciones muy abruptas con un periodo muy pequeño. Con respecto a la variación espacial, no hay mucho que comentar sobre la del desplazamiento ya que es similar a la de las Figuras 6.12.b y 6.13.b, pero la del esfuerzo tiene ahora una forma oscilatoria con varios máximos y mínimos relativos a lo largo de la barra, aunque el valor más alto de la amplitud parece que se alcanza en $x=0$.

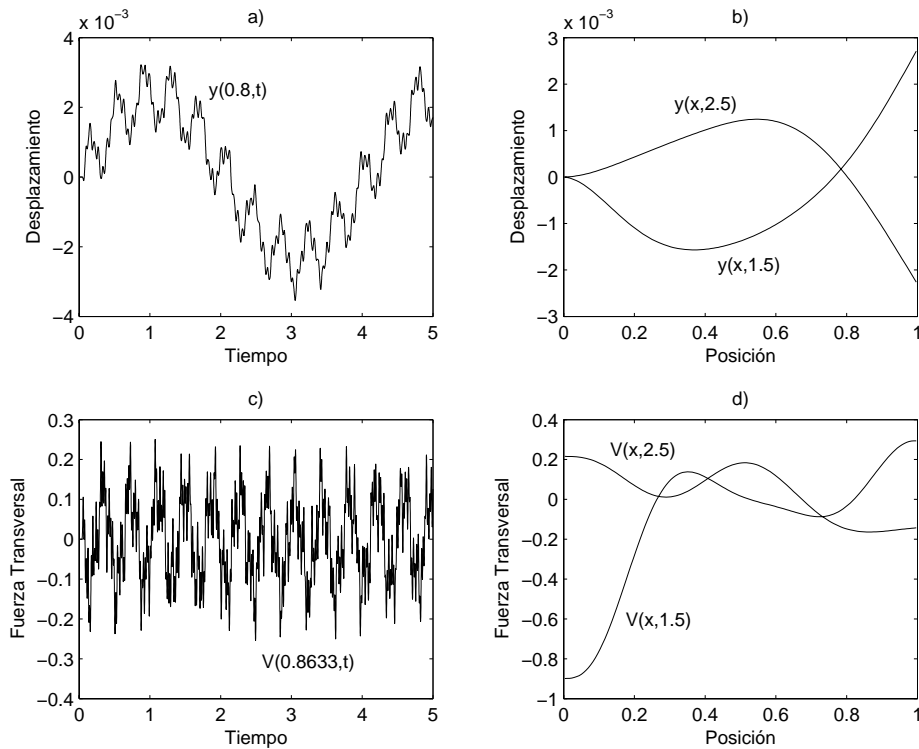


Figura 6.15. Resultados de la aplicación de la fuerza tipo pulso gaussiano a la barra amordazada-carga másica, con $m=1$, en $x_0=0.5$. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

La aplicación del pulso gaussiano (Figura 6.15) produce en el desplazamiento una variación temporal parecida a la del pulso cuadrado, una oscilación general del valor medio idéntica a la del pulso cuadrado, junto a oscilaciones de periodo menor, también muy similares a las de la Figura 6.14. Pero dentro de estas oscilaciones aparecen a su vez oscilaciones irregulares que no aparecían anteriormente y que no siguen una pauta definida. La variación temporal de la fuerza transversal también es muy parecida a la del pulso cuadrado, así como la variación espacial. Por lo tanto, parece que la aplicación del pulso gaussiano produce un efecto en la barra similar al del pulso cuadrado, pero que activa más frecuencias naturales de la barra.

c.- Validación del modelo en red para la barra amordazada-carga másica

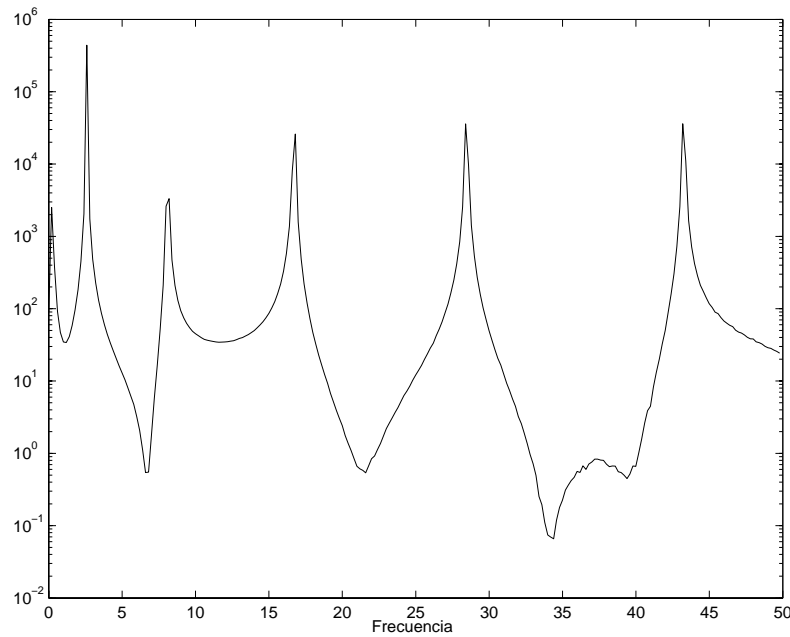


Figura 6.16. Espectro de la fuerza transversal en $x=0.7967$ al aplicar el pulso cuadrado en $x_0=0.5$ a la barra amordazada-carga másica.

Del mismo modo que se hizo en el Capítulo 5 para la barra libre-carga másica, la validación del modelo en red utilizado en esta sección la realizamos mediante la comparación de las frecuencias naturales teóricas, obtenidas a partir de la ecuación trascendente (6.34), con las obtenidas a partir de la Transformada de Fourier de la fuerza transversal en $x=0.7967$ al aplicar el pulso cuadrado (Figura 6.16).

$$[1 + \cos(\omega_n^{1/2}) \cosh(\omega_n^{1/2})] = m[\sin(\omega_n^{1/2}) \cosh(\omega_n^{1/2}) - \cos(\omega_n^{1/2}) \sinh(\omega_n^{1/2})] \quad (6.34)$$

Esta comparación, que se muestra en la Tabla 6.2, es bastante satisfactoria, ya que el espectro de los resultados de la simulación se aproxima bastante a las frecuencias naturales teóricas, y si tenemos en cuenta el error en el espectro debido al muestreo, $\Delta f=0.125$, podemos afirmar que coinciden, por lo que se comprueba que el modelo en red utilizado es correcto.

Posición de los picos del espectro	0.20	2.26	8.20	16.80	28.39	43.19
Frecuencias naturales teóricas	0.25	2.58	8.09	16.75	28.54	43.42

Tabla 6.2. Comparación entre las frecuencias de los picos del espectro simulado de la Figura 6.16 y las frecuencias naturales de la barra amordazada-carga másica.

6.3.- Modelo de Timoshenko

6.3.1.- Celda elemental

Las ecuaciones del movimiento, en forma adimensional, para las vibraciones transversales en el modelo de Timoshenko son (ver Capítulo 3):

$$\frac{1}{\beta} V - \frac{\partial M}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.35)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6.36)$$

con las ecuaciones constitutivas:

$$V = \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \quad (6.37)$$

$$M = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.38)$$

Se trata de dos ecuaciones del movimiento acopladas tanto directamente entre sí como a través de las ecuaciones constitutivas. Es el caso más complejo que se va a estudiar en esta Memoria y que va a requerir el modelo en red más complicado.

Como tenemos dos ecuaciones del movimiento, es necesario construir dos celdas elementales, una para cada ecuación, con sus variables flujo y potencial correspondientes. Así, para la primera celda elemental, elaborada a partir de las ecuaciones (6.36) y (6.37), elegimos como variable potencial el desplazamiento

transversal de la barra, y como variable flujo la fuerza transversal, mientras para la segunda celda elemental, elaborada a partir de las ecuaciones (6.35) y (6.38), tomamos como variable potencial el ángulo de torsión de la barra, y como variable flujo el momento de torsión de la barra. A efectos de notación, llamaremos a la celda elemental correspondiente la ecuación (6.36) celda a , mientras que a la celda elemental correspondiente a la ecuación (6.35) celda b , y los flujos y potenciales de dicha celda se notarán como:

$$\Phi^a \rightarrow y \qquad J^a \rightarrow V \qquad (6.39)$$

$$\Phi^b \rightarrow \psi \qquad J^b \rightarrow M \qquad (6.40)$$

Así, para la construcción de la celda a partimos de la ecuación:

$$\frac{\partial J^a}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \Phi^a(x, t)}{\partial t^2} \qquad (6.41)$$

Dado que la forma de la ecuación (6.41) es idéntica a la de la ecuación (6.5), la celda elemental será la misma que la de la Figura 6.2, con los circuitos auxiliares de la Figura 6.3, salvo por el valor de los parámetros y por el circuito auxiliar que proporciona $J^a_{i\pm\Delta}$. Para obtener $J^a_{i\pm\Delta}$ partimos de la ecuación:

$$J^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial x} - \Phi^b \qquad (6.42)$$

que al aproximarla por diferencias finitas queda en la forma:

$$\begin{aligned} J^a_{i+\Delta} &= \frac{\Phi^a_{i+1} - \Phi^a_i}{\Delta x} - \Phi^b_{i+\Delta} \\ J^a_{i-\Delta} &= \frac{\Phi^a_i - \Phi^a_{i-1}}{\Delta x} - \Phi^b_{i-\Delta} \end{aligned} \qquad (6.43)$$

que son las expresiones que proporcionan el flujo para las fuentes de flujo situadas a izquierda y derecha del nodo i . En la Figuras 6.17 y 6.18 se muestra la celda elemental a y sus circuitos auxiliares.

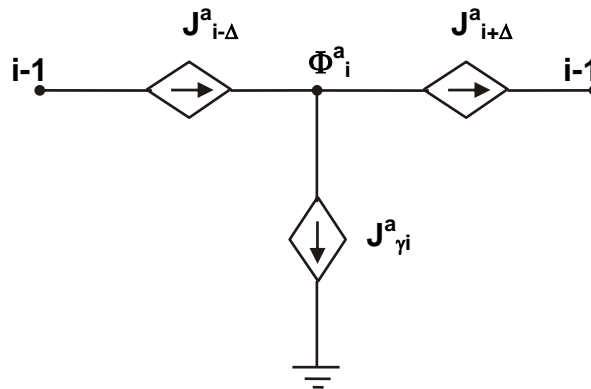


Figura 6.17. Celda elemental a correspondiente a la ecuación (6.36).

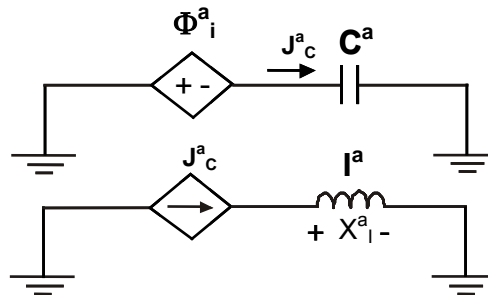


Figura 6.18. Circuitos auxiliares de la celda elemental a .

La celda b se construye a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{\beta} J^a - \frac{\partial J^b}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi^b}{\partial t^2} \quad (6.44)$$

que al discretizarla queda como:

$$\frac{\Delta x}{\beta} J_{i+\Delta}^a - J_{i+1}^b + J_i^b - \Delta x \alpha \frac{\partial^2 \Phi^b}{\partial t^2} = 0 \quad (6.45)$$

que es muy similar a la ecuación (5.5), correspondiente a las vibraciones longitudinales, por lo que la celda elemental es casi idéntica a la celda elemental de las Figuras 5.2 y 5.3, salvo porque es necesario incorporar una fuente de flujo que proporcione el término $\Delta x J^a/\beta$. En las Figuras 6.19 y 6.20 se tiene la celda elemental b con sus circuitos auxiliares. Hay que señalar que, debido a la forma en que se encuentran acopladas las ecuaciones (6.35)-(6.38), las variables Φ^a y Φ^b no corresponden a los mismos puntos de

la barra, sino que Φ^a se localiza en los nodos que hemos notado como i , que se encuentran en las posiciones $x=i\Delta x$, mientras que Φ^b se localiza en los nodos $i\pm\Delta$, que se encuentran en las posiciones $x=(i\pm 1/2)\Delta x$. Del mismo modo, la variable J^a se localiza en los nodos $i\pm\Delta$, igual que Φ^b , y J^b en los nodos i , los mismo que Φ^a .

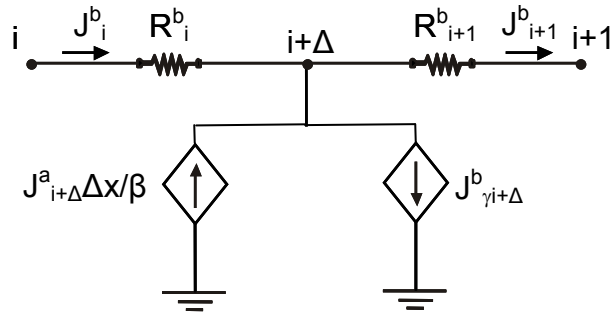


Figura 6.19. Celda elemental b correspondiente a la ecuación (6.35).

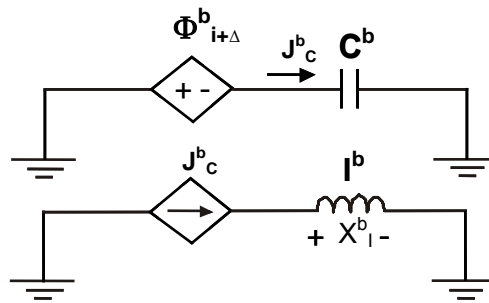


Figura 6.20. Circuitos auxiliares de la celda elemental b .

Así pues, el modelo en red se construye mediante la conexión en cascada de las celdas elementales a , en paralelo con la conexión en cascada de las celdas elementales b , como se muestra en la Figura 6.21. Las condiciones de contorno se incorporan a las celdas situadas en los extremos según corresponda, como se realiza en las secciones siguientes al estudiar la barra con los dos extremos apoyados y la barra amordazada-carga másica. Del mismo modo que al llevar a cabo la simulación de las vibraciones longitudinales y las transversales con el modelo de Euler-Bernoulli, al construir los modelos en red y simular las vibraciones transversales con el modelo de Timoshenko hemos trabajado con $N=150$, esto es, 150 celdas elementales a conectadas entre sí en paralelo con 150 celdas elementales b conectadas entre sí. Para los parámetros de las ecuaciones (6.35) y (6.36) hemos utilizado los mismos valores que Ekwaro-Osire *et al* en [6.18], que son $\alpha=0.19695$ y $\beta=0.00305$.

A modo de síntesis, en la Tabla 6.3 se especifica el valor de los distintos parámetros del circuito de cada celda elemental.

Celda elemental a		Celda elemental b	
$C^a=(\beta\Delta x)^{1/2}$	$I^a=(\beta\Delta x)^{1/2}$	$C^b=(\alpha\Delta x)^{1/2}$	$I^b=(\alpha\Delta x)^{1/2}$
$J^a_{i+\Delta}=(\Phi^a_{i+1}-\Phi^a_i)/\Delta x-\Phi^b_{i+\Delta}$	$J^a_{i-\Delta}=(\Phi^a_i-\Phi^a_{i-1})/\Delta x-\Phi^b_i$	$R^b_i=\Delta x/2$	$R^b_{i+1}=\Delta x/2$

Tabla 6.3. Valores de los distintos parámetros de las celdas elementales a y b y expresiones de las fuentes de flujo de la celda a .

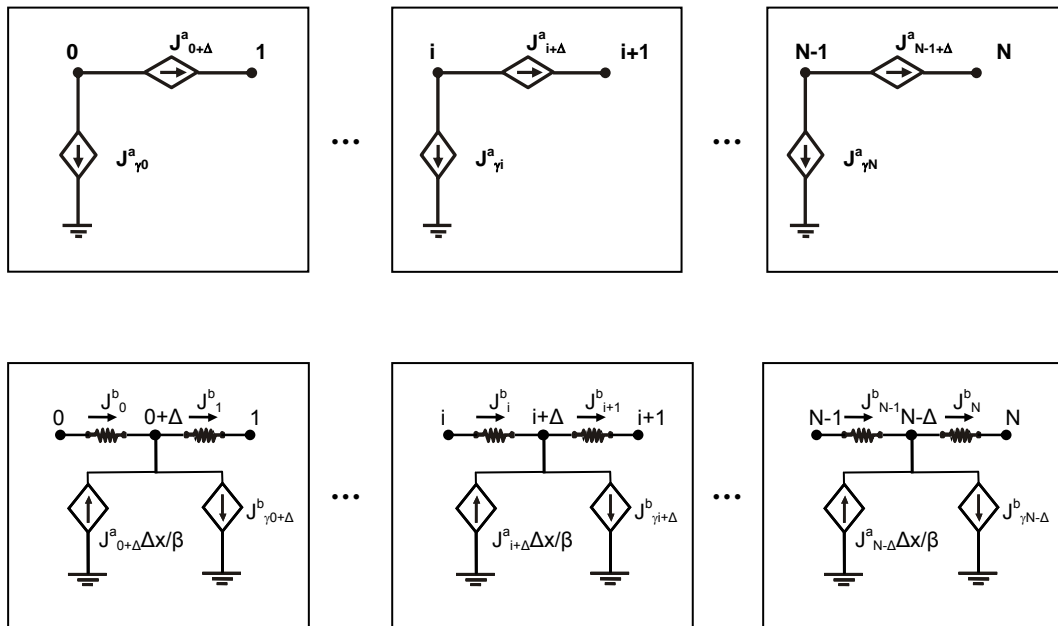


Figura 6.21. Conexión de las celdas elementales del modelo de Timoshenko.

6.3.2.- Barra apoyada en los dos extremos

6.3.2.1.- Modelo en red

Las condiciones de contorno de esta barra son:

$$y(0,t)=0 \quad y(1,t)=0 \quad M(0,t)=0 \quad M(1,t)=0 \quad (6.46)$$

Las relativas al desplazamiento se imponen sobre la celda elemental a , conectando los extremos de la celda inicial y final a tierra, mientras que las relativas al momento de torsión se especifican en la celda elemental b haciendo que las resistencias R^b_0 y R^b_N

tengan un valor infinito. Por tanto, el modelo en red queda en la forma de la Figura 6.22.

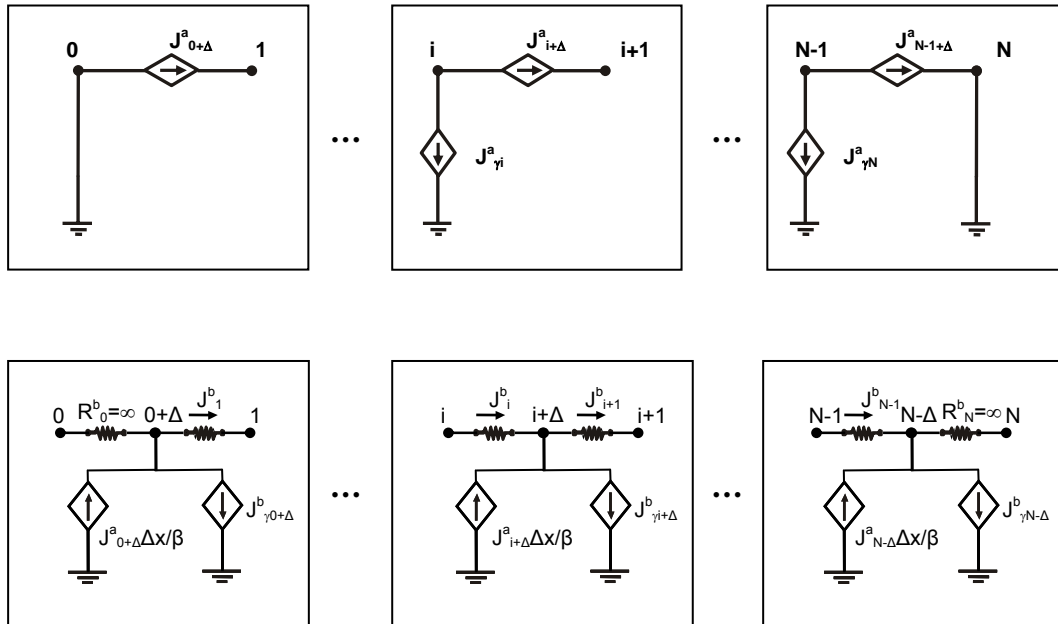


Figura 6.22. Modelo en red para la barra apoyada en los dos extremos.

6.3.2.2.- Simulación de vibraciones libres

En este apartado se estudia el comportamiento del MSR y su validez a la hora de simular vibraciones libres. Del mismo modo que en la Sección 6.2.3.2, solo consideraremos un caso, el de la imposición como condiciones iniciales del primer modo de vibración de la barra, condiciones iniciales que se expresan como:

$$\begin{aligned}
 y(x,0) &= \text{sen}(\pi x) & \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x,0} &= 0 \\
 \psi(x,0) &= 3.1096 \cos(\pi x) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{x,0} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.47}$$

Los resultados obtenidos para el desplazamiento y el esfuerzo se muestran en la Figura 6.23, donde se observa que, como era de esperar, la barra vibra de acuerdo con el primer modo de vibración. Al trabajar con el modelo de Timoshenko, el ángulo y el momento de torsión se encuentran representados explícitamente en el modelo en red, por lo que se pueden obtener directamente a partir de las simulaciones. Así pues, además de estudiar el desplazamiento y la fuerza transversal mostraremos los resultados

para el ángulo y el momento de torsión. Para el caso de las vibraciones libres consideradas en este apartado, en la Figura 6.24 se pueden observar los resultados obtenidos. La variación temporal, tanto del desplazamiento y la fuerza transversal, como del ángulo y el momento de torsión, son muy similares, pero en la variación espacial se aprecia claramente el desfase de media longitud de onda entre la forma senoidal del desplazamiento y el momento de torsión por un lado y el ángulo de torsión y la fuerza transversal por otro.

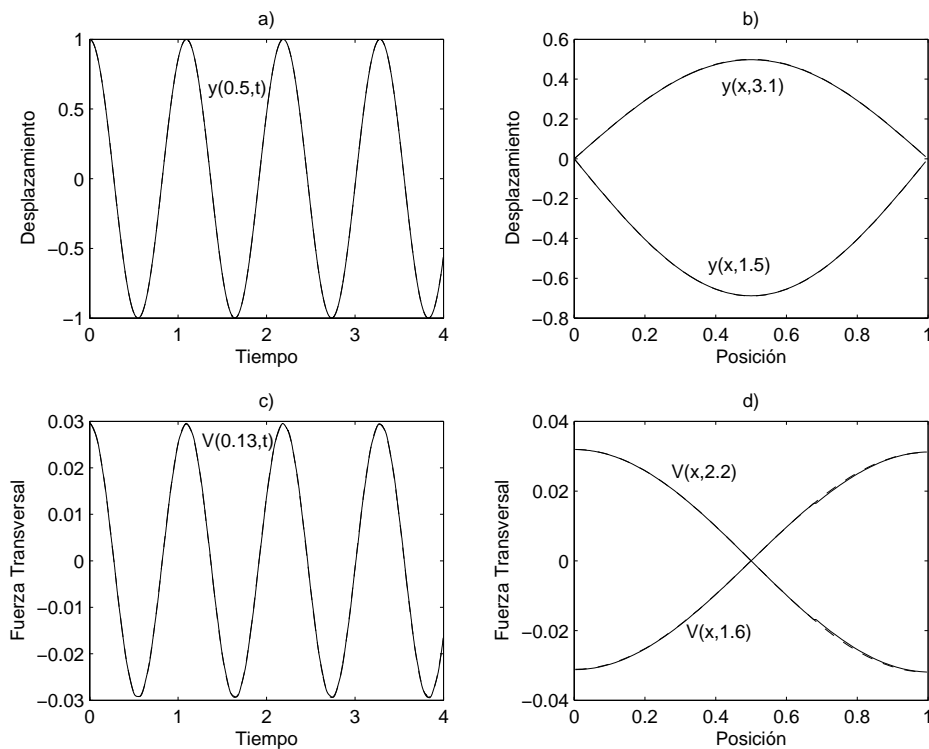


Figura 6.23. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al imponer como condiciones iniciales el primer modo de vibración en la barra simplemente apoyada. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Para este caso, dada la relativa suavidad de la forma de la vibración, los resultados de la simulación no se distinguen de la solución teórica para ninguna de las variables físicas consideradas, teniendo, por tanto, bastante éxito el MSR.

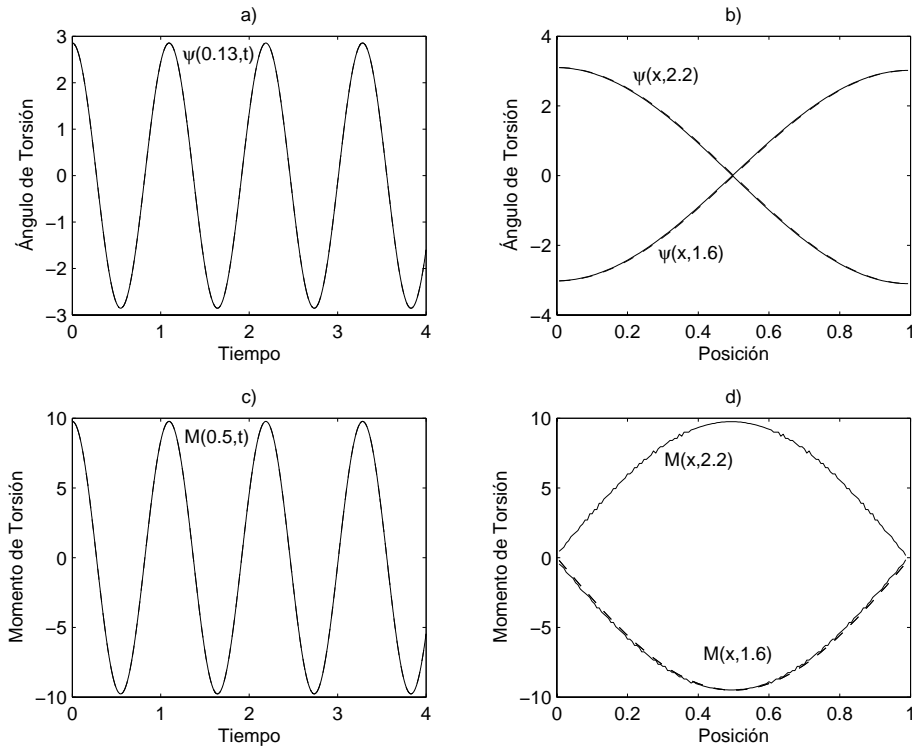


Figura 6.24. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al imponer como condiciones iniciales el primer modo de vibración en la barra simplemente apoyada. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

6.3.2.3.- Simulación de vibraciones forzadas

a.- Aplicación de una fuerza senoidal

El primer caso considerado de vibraciones forzadas es el de una fuerza senoidal, según la expresión (3.155). En esta sección estudiaremos la aplicación de la fuerza en $x_0=0.667$, con dos frecuencias distintas:

- $f_a=\pi$, que se encuentra entre la segunda frecuencia natural, $f_2=2.12$, y la tercera, $f_3=3.29$.

- $f_a=2\pi$, que se encuentra entre la quinta frecuencia natural, $f_5=5.58$, y la sexta, $f_6=6.71$.

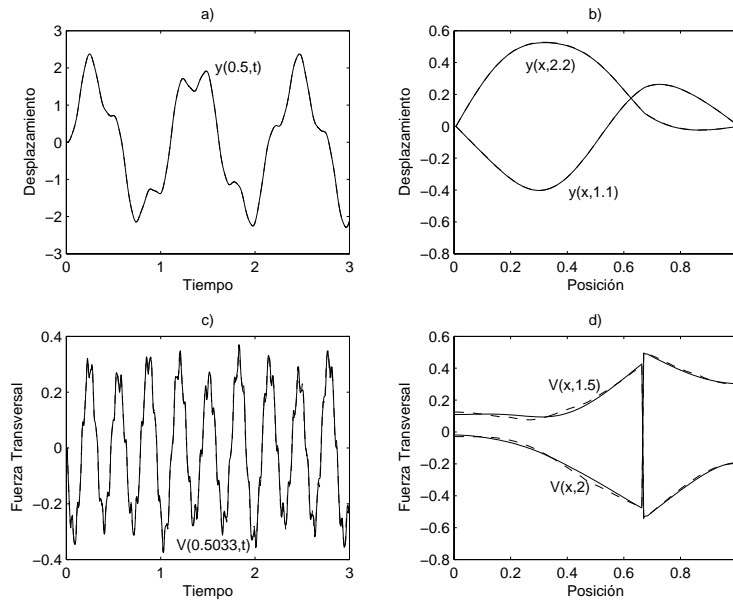


Figura 6.25. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

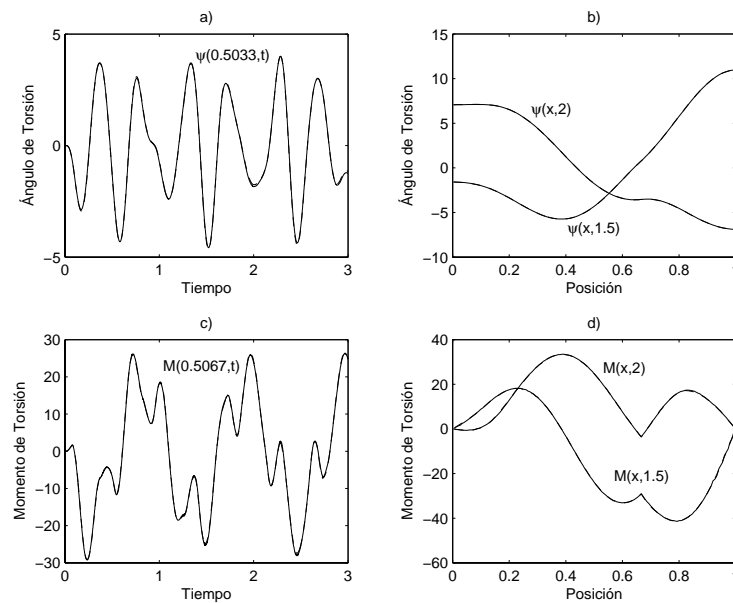


Figura 6.26. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

La variación del desplazamiento con el tiempo (Figura 6.25) es una curva de carácter suave, sin cambios bruscos de valor, y, en principio, no tiene una forma regular o periódica, al igual que su variación espacial. Como en el modelo de Euler-Bernoulli, la fuerza transversal sí presenta cambios bruscos al variar con el tiempo, así como una discontinuidad en el punto de aplicación de la fuerza. Todo esto produce que la coincidencia entre la simulación y la solución teórica sea completa para el desplazamiento, aunque en la fuerza transversal aparecen pequeñas diferencias de amplitud.

El comportamiento del ángulo y el momento de torsión es de carácter intermedio entre el del desplazamiento y la fuerza transversal. Su variación temporal es ligeramente más rápida que la del desplazamiento, pero mucho menor que la de la fuerza transversal, y en cuanto a su variación espacial, la forma del ángulo de torsión, al no estar limitado a tener un valor nulo en los extremos, es bastante poco definida, no tiene la forma senoidal de otras variables, al contrario que el momento de torsión, que sí presenta una forma senoidal con una discontinuidad en la primera derivada en el punto de aplicación de la fuerza. Al trabajar con estas variables, la coincidencia entre los resultados de la simulación y la expresión teórica es completa, como puede verse en la Figura 6.26.

La aplicación de la fuerza armónica de frecuencia 2π (ver Figura 6.27) produce una forma más regular de la variación temporal del desplazamiento, la cual presenta pequeñas oscilaciones de frecuencia media y baja amplitud dentro de una variación de carácter senoidal de frecuencias baja y gran amplitud. Su variación espacial, a pesar de anularse en los extremos, no tiene una forma clara. La fuerza transversal sigue presentando cambios bruscos al variar con el tiempo, y una frecuencia dominante muy alta en comparación con la del desplazamiento. La variación espacial tampoco presenta una forma clara, salvo por la presencia de la discontinuidad en $x=0.667$. En cuanto a la comparación entre simulación y solución teórica, en el desplazamiento no se aprecian diferencias, pero en la fuerza transversal estas comienzan a ser importantes.

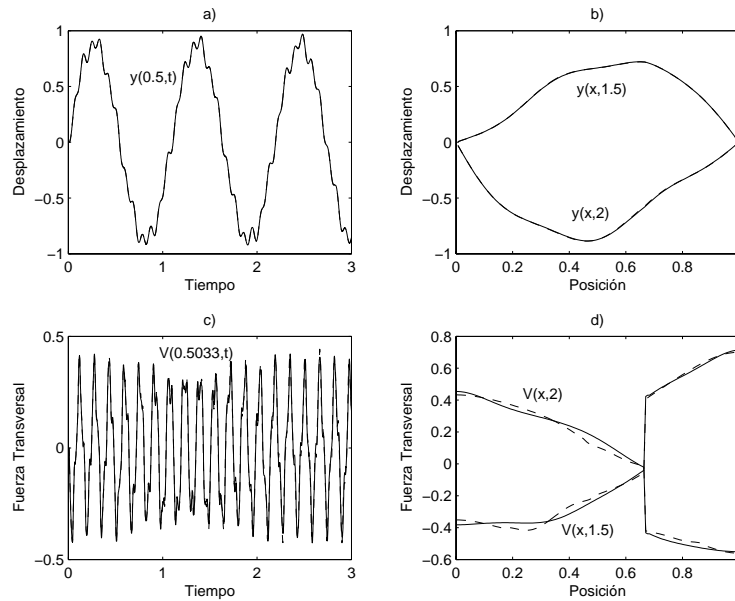


Figura 6.27. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo

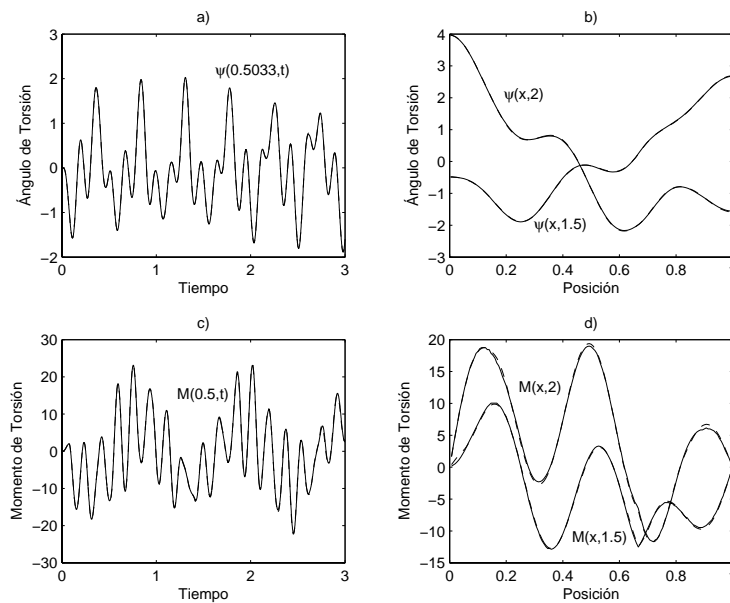


Figura 6.28. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

La variación del ángulo de torsión con el tiempo no presenta las pequeñas oscilaciones de frecuencia media que aparecen en el desplazamiento, sino que aparecen oscilaciones de frecuencia relativamente baja de amplitud media moduladas por una oscilación general de frecuencia aún más baja. La variación espacial del ángulo sigue manteniendo la forma indefinida de la Figura 6.25. En cuanto al momento de torsión, presenta características semejantes en su variación temporal a la del ángulo, con oscilaciones de frecuencia similar a las de este moduladas por una oscilación general de frecuencia mucho menor, mientras que su variación espacial tiene una forma senoidal con varios vientres y nodos. En el ángulo no se distinguen las gráficas correspondientes a la simulación y la expresión teórica, pero en el momento se puede apreciar pequeñas diferencias de amplitud entre ellas.

b.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

En este apartado estudiamos la aplicación de una fuerza tipo pulso cuadrado y gaussiano, dadas por las expresiones (6.22)-(6.25). Las características de dichas fuerzas son idénticas a las de la Sección 6.2.3.3.b, salvo el punto de aplicación de la fuerza, que en este caso es $x_0=0.667$.

En la Figura 6.29 se muestran los resultados obtenidos para el desplazamiento y la fuerza transversal al aplicar el pulso cuadrado. Al igual que en la Figura 6.27, en la variación temporal del desplazamiento aparece una oscilación general de gran amplitud salpicada de pequeñas oscilaciones de frecuencia media, aunque aquí la variación espacial tiene una forma más regular que en la Figura 6.27. Por el contrario, la fuerza transversal varía con el tiempo con una frecuencia muy alta y unos cambios muy bruscos de valor, y su variación espacial tiene una forma muy anómala. Así, en el desplazamiento aparecen pequeñas diferencias de amplitud, pero en la fuerza transversal el desacuerdo es muy grande, de forma que, salvo el orden de las magnitudes, los resultados de la simulación no aportan datos precisos sobre la fuerza transversal.

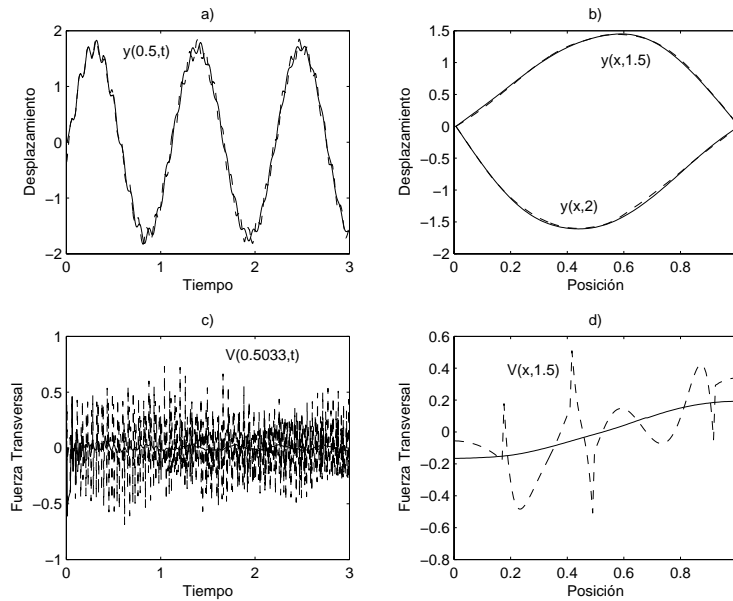


Figura 6.29. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso cuadrado en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en un instante de tiempo.

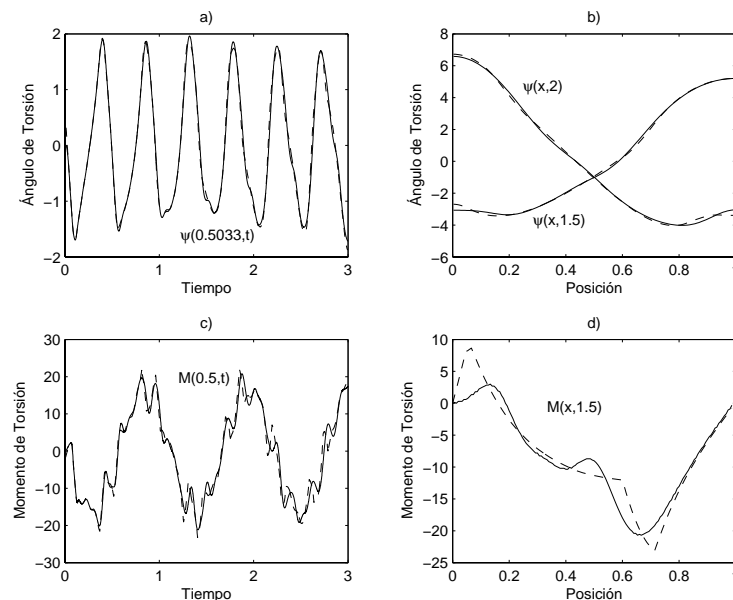


Figura 6.30. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso cuadrado en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en un instante de tiempo.

La variación temporal del ángulo de torsión tiene una forma periódica casi senoidal, con una frecuencia preponderante, así como una variación espacial muy suave con valores opuestos en los extremos, mientras que la variación temporal del momento de torsión tiene una forma aproximadamente periódica en sus rasgos generales, para nada senoidal, y con numerosos picos abruptos, aunque su variación espacial si tiene una forma más suave. En el ángulo aparecen pequeñas diferencias de amplitud entre los resultados de la simulación y la solución teórica, diferencias que se hacen más grandes y acusadas para el momento de torsión.

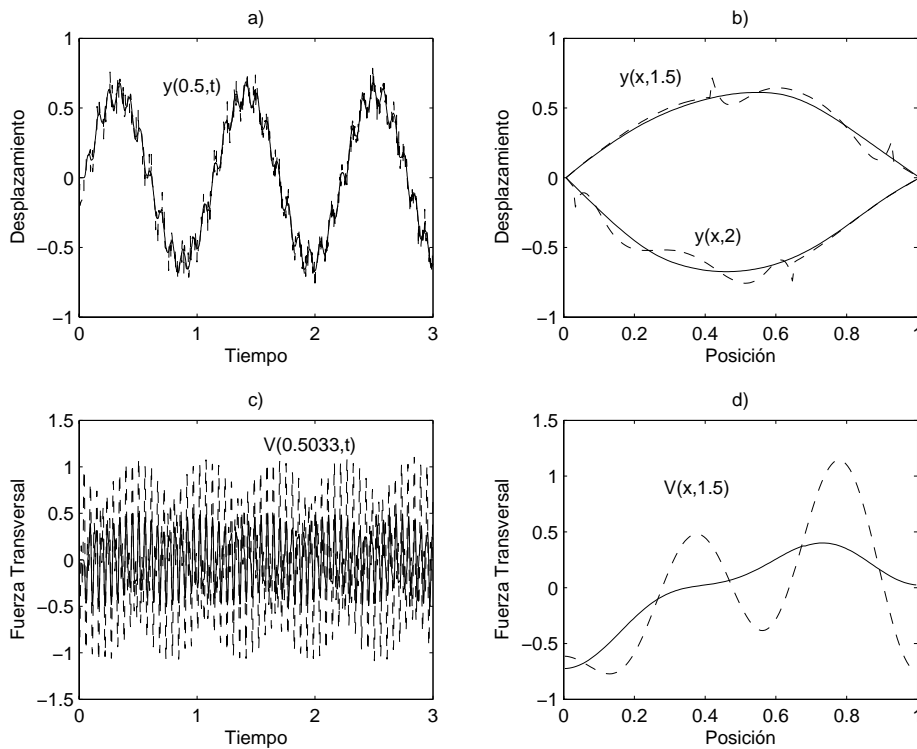


Figura 6.31. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso gaussiano en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en un instante de tiempo.

La aplicación del pulso gaussiano produce en el desplazamiento y la fuerza transversal un efecto similar al del pulso cuadrado, pero más acusado. La variación temporal del desplazamiento presenta una oscilación general, igual que en la Figura 6.29, con pequeñas oscilaciones muy abruptas y acusadas, y la fuerza transversal tiene unos cambios de valor de frecuencias muy altas, aunque con una forma ligeramente

periódica, mientras que las variaciones espaciales presentan unas formas más suaves. Las diferencias entre simulación y teoría también se hacen más grandes al aplicar esta fuerza, diferencias que vuelven a ser especialmente notables para la fuerza transversal.

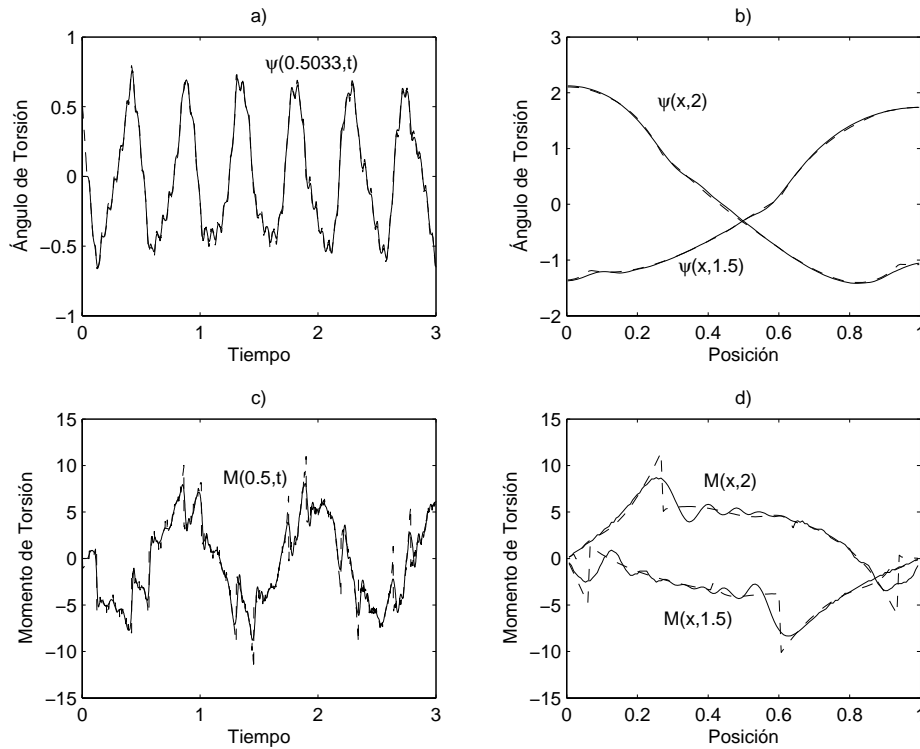


Figura 6.32. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso gaussiano en $x=0.667$ a la barra apoyada en los dos extremos. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

La variación del ángulo de torsión con el tiempo, que se puede observar en la Figura 6.32, presenta pequeñas variaciones bruscas de amplitud dentro de una oscilación general, con numerosos picos abruptos, aunque su variación espacial si tiene una forma suave. Del mismo modo, la variación temporal del momento de torsión tiene un carácter muy abrupto, más que el ángulo. Y, al igual que ocurría al aplicar el pulso cuadrado, las diferencias entre simulación y teoría son pequeñas para el ángulo de torsión, pero más graves para el momento.

6.3.3.- Barra con un extremo amordazado y otro con una masa puntual

6.3.3.1.- Modelo en red

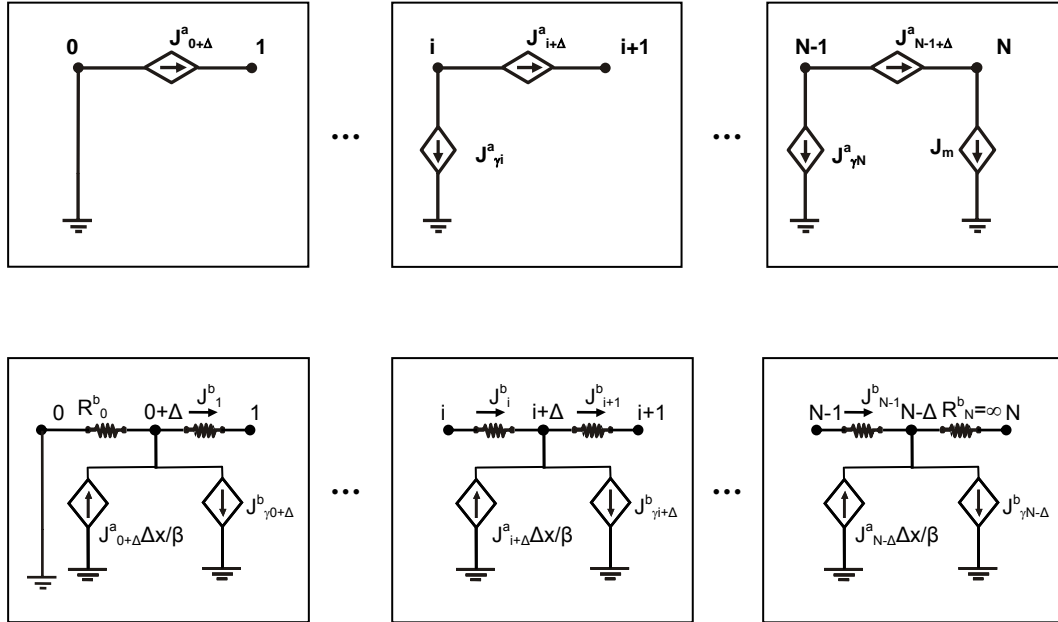


Figura 6.33. Modelo en red de la barra amordazada-carga másica.

Las condiciones de contorno de esta barra son, como se mostró en la Sección 6.2.4.1:

$$y(0,t)=0 \quad \psi(0,t)=0 \quad M(1,t)=0 \quad V(1,t)=m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \quad (6.48)$$

Las condiciones relativas al desplazamiento y el ángulo de torsión nulo en $x=0$ se implementan mediante la conexión a tierra del nodo 0 de la celdas a y b , mientras que la implementación de las condiciones de contorno en $x=1$ se realiza haciendo que la resistencia R^b_N tenga un valor infinito, y conectando una fuente de flujo entre el nodo N de la celda a y tierra que tenga un valor dado por la expresión:

$$J_m = m \frac{d\Phi^a_N}{dt} \quad (6.49)$$

lo que se consigue mediante la utilización de dos circuitos auxiliares idénticos a los que proporcionan J_γ , como los mostrados en la Figura 6.11, cuyos parámetros tienen el valor:

$$C_m = m^{1/2} \quad I_m = m^{1/2} \quad (6.50)$$

6.3.3.2.- Simulación de vibraciones forzadas

En esa sección se estudia el movimiento vibratorio resultante de la aplicación de los distintos tipos de fuerza considerados en la barra amordazada-carga másica, con $m=1$.

a.- Aplicación de una fuerza senoidal

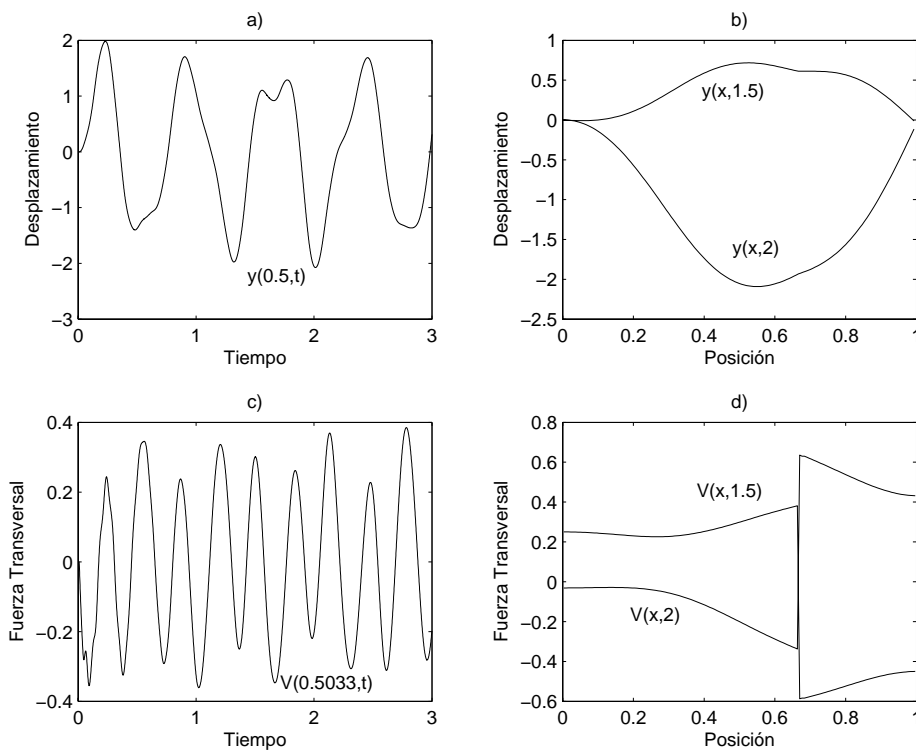


Figura 6.34. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Los resultados para el desplazamiento y la fuerza transversal de la aplicación de la fuerza armónica de frecuencia π a la barra amordazada-carga másica se muestran en la Figura 6.34. Las variaciones temporales del desplazamiento y la fuerza tienen una forma suave y aproximadamente regular, mientras que la variación espacial del desplazamiento tiene una forma indefinida y la de la fuerza transversal presenta la discontinuidad típica en el punto de aplicación de la fuerza externa, con una distribución aproximadamente antisimétrica alrededor de dicho punto.

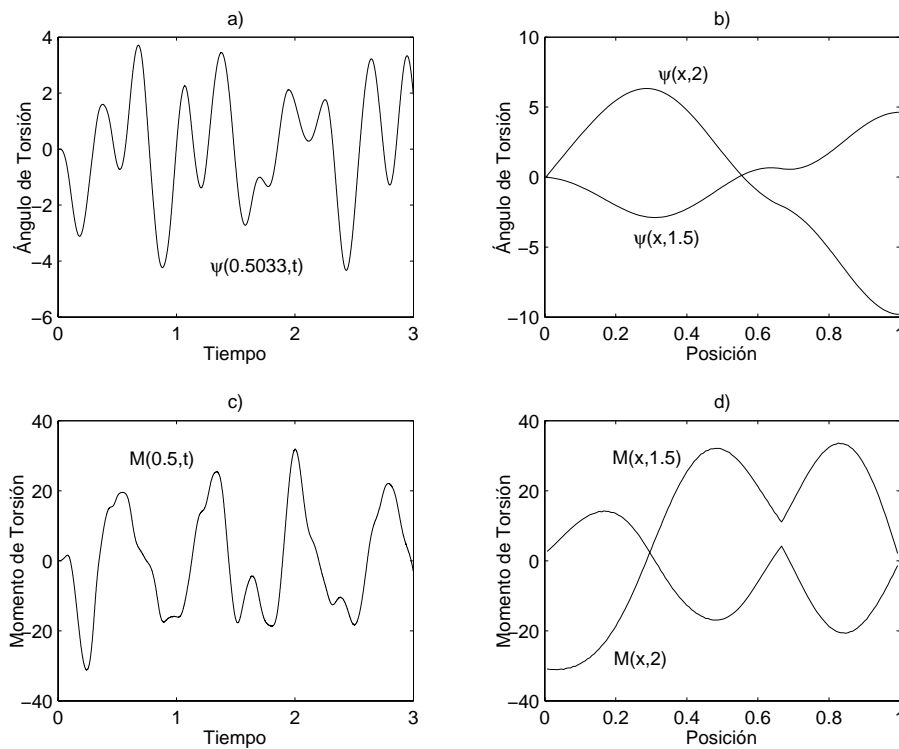


Figura 6.35. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia π en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

La variación del ángulo de torsión con el tiempo (Figura 6.35) presenta una forma similar a la del desplazamiento, pero en la que intervienen frecuencias de valor más alto que en este, mientras que su forma espacial también es similar a la del desplazamiento, salvo por el hecho de que en el extremo derecho toma valores de mayor amplitud. En este caso, la variación temporal del momento de torsión presenta un aspecto más irregular que el ángulo, aunque con menos frecuencias implicadas en su

evolución temporal, mientras que su variación temporal si tiene una forma senoidal con la discontinuidad en la pendiente en el punto de aplicación de la fuerza externa.

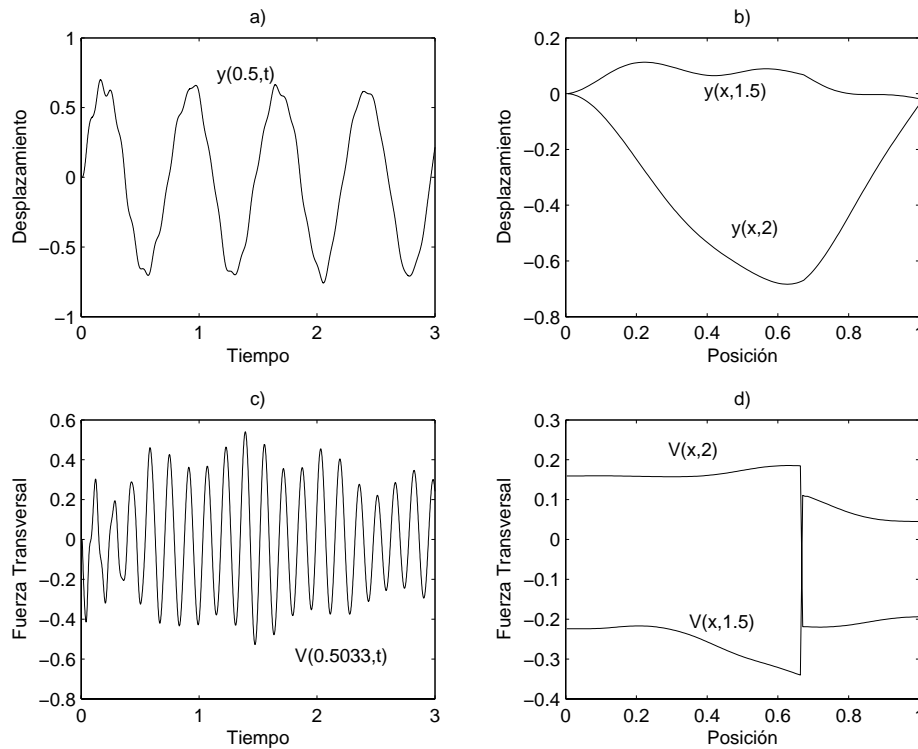


Figura 6.36. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

Al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π , los resultados para el desplazamiento y la fuerza transversal (Figura 6.36) son similares a los obtenidos al aplicar la fuerza de frecuencia π , salvo porque la variación temporal del desplazamiento es más homogénea y la frecuencia de la variación temporal de la fuerza transversal aumenta. Para el ángulo y el momento de torsión (Figura 6.35), la variación temporal es más irregular, con varias frecuencias de valor medio involucradas en el movimiento, y con un cierto carácter periódico para el ángulo, mientras que su variación espacial presenta una forma muy indefinida en ambos casos, siendo únicamente destacable la presencia de la discontinuidad del momento de torsión en $x_0=0.667$.

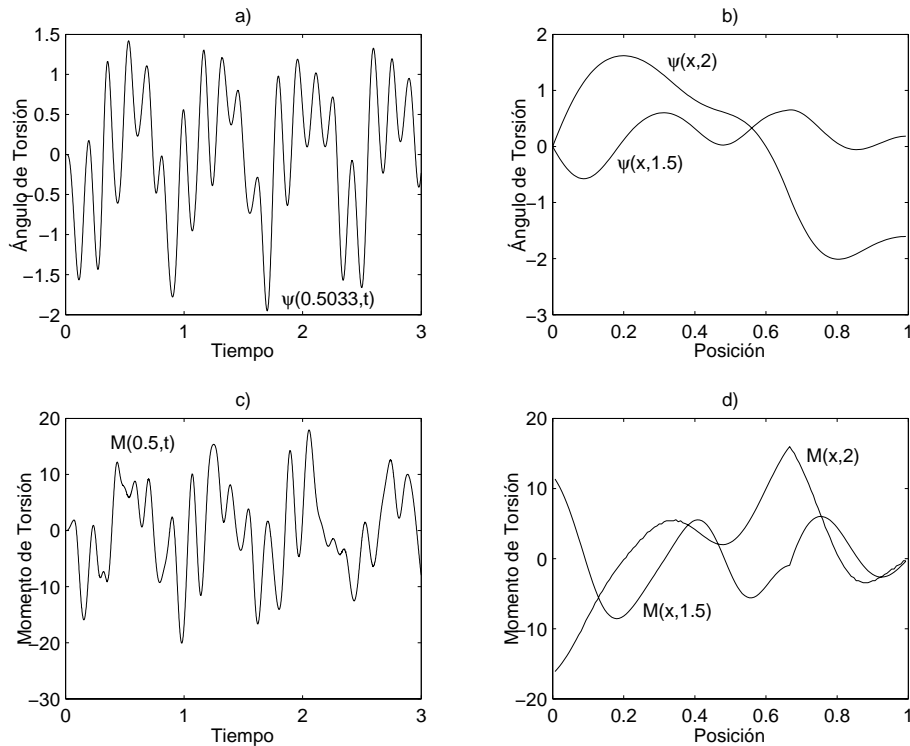


Figura 6.37. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π en $x=0.667$ a la barra amortizada-carga másica. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

b.- Aplicación de una fuerza tipo pulso

La aplicación de la fuerza tipo pulso cuadrado produce una variación temporal aproximadamente periódica en el desplazamiento y la fuerza transversal (ver Figura 6.38), aunque en este último caso de muy alta frecuencia. La variación espacial del desplazamiento parece presentar un vientre que se desplaza a lo largo de la barra, mientras que la de fuerza es casi lineal.

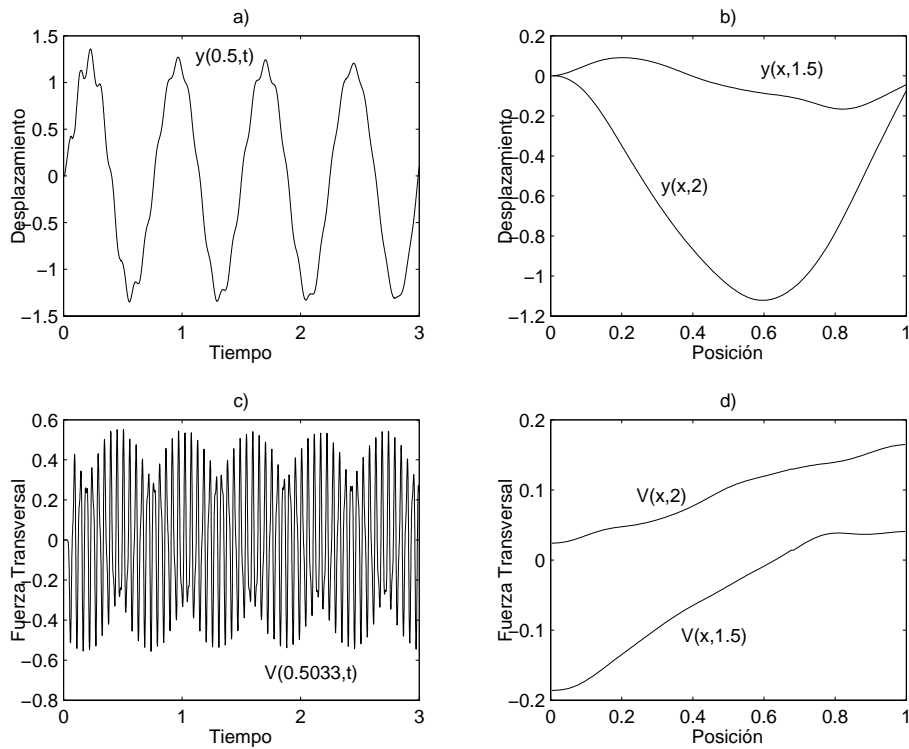


Figura 6.38. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso cuadrado en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

En cuanto a los resultados para el ángulo y el momento de torsión (Figura 6.39), la variación temporal de estas variables vuelve a tener, de nuevo, un carácter más irregular y aproximadamente periódico, con algunos picos ligeramente abruptos, lo que implica la excitación de más frecuencias naturales de la barra y de más alto valor que para el desplazamiento, aunque no tan altas como las de la fuerza transversal. Y, al igual que al aplicar la fuerza armónica de frecuencia 2π , la variación espacial de estas variables tiene una forma muy indefinida, por lo que parece que esto es una consecuencia del aumento del número de las frecuencias naturales excitadas y de sus valores.

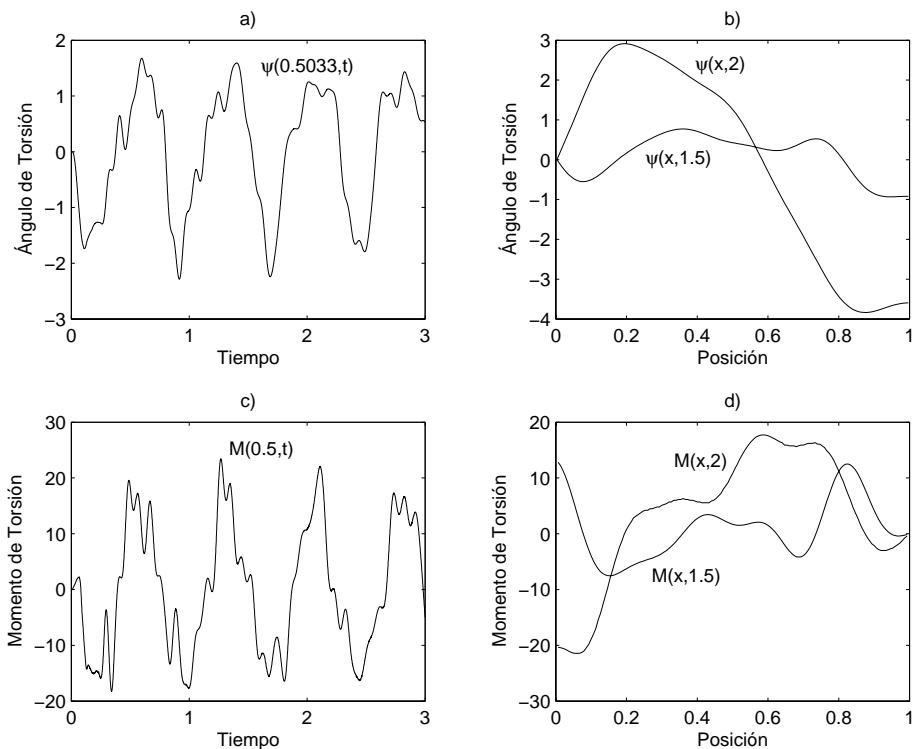


Figura 6.39. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso cuadrado en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

Si aplicamos una fuerza tipo pulso gaussiano se produce, como en la barra apoyada en los dos extremos, un efecto similar al del pulso cuadrado pero más acentuado. La variación del desplazamiento con el tiempo (Figura 6.40) presenta una oscilación general de baja frecuencia con pequeñas oscilaciones más abruptas y de mayor frecuencia, mientras que la de la fuerza transversal consiste de nuevo en oscilaciones muy rápidas y aproximadamente periódicas. La variación espacial del desplazamiento presenta un único vientre que se mueve ligeramente a lo largo de la barra, con un desplazamiento en el extremo de la carga másica muy pequeño, mientras que la distribución de la fuerza transversal es aproximadamente antisimétrica, con máximos en la amplitud en ambos extremos, sobre todo en el de la carga másica.

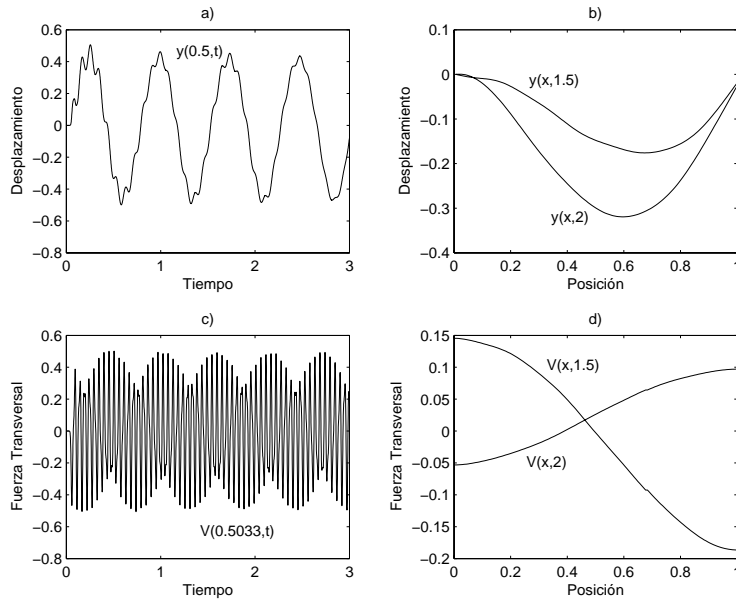


Figura 6.40. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso gaussiano en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del desplazamiento con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del desplazamiento con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación de la fuerza transversal con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación de la fuerza transversal con la posición en dos instantes de tiempo.

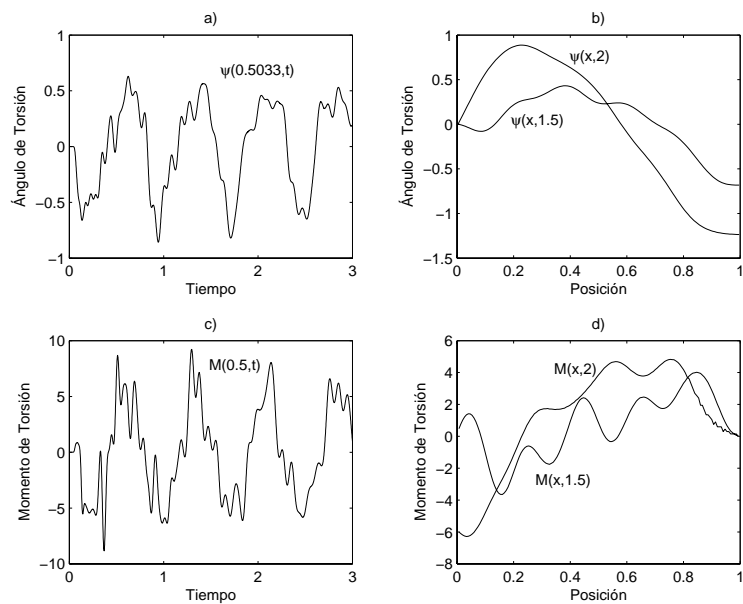


Figura 6.41. Comparación de los resultados de la simulación (línea continua) y la solución analítica (línea discontinua) al aplicar la fuerza tipo pulso gaussiano en $x=0.667$ a la barra amordazada-carga másica. a) Variación del ángulo de torsión con el tiempo en un punto de la barra. b) Variación del ángulo de torsión con la posición en dos instantes de tiempo. c) Variación del momento de torsión con el tiempo en un punto de la barra. d) Variación del momento de torsión con la posición en dos instantes de tiempo.

El comportamiento del ángulo y el momento de torsión (ver Figura 6.41) también es similar al que aparecía al aplicar el pulso cuadrado. La variación temporal del ángulo y el momento de torsión presenta, de nuevo, una oscilación general con numerosos picos, algunos muy abruptos, siendo estos más frecuentes en el momento de torsión. Y la variación espacial de estas variables también es muy similar en su forma a la que aparecía al aplicar el pulso cuadrado, siendo esta suave y con algunas oscilaciones, sobre todo en el momento de torsión.

c.- Validación del modelo en red para la barra amordazada-carga másica

Al igual que en las Secciones 5.7.3 y 6.2.4.2.c, en este apartado se realiza la validación del modelo en red para la barra amordazada-carga másica, a partir del modelo de Timoshenko, mediante la comparación de las frecuencia naturales teóricas con las obtenidas a partir de los resultados numéricos. En la Figura 6.42 se muestra la Transformada de Fourier del momento de torsión en $x=0.5$ al aplicar el pulso gaussiano en $x_0=0.667$, y en la Tabla 6.4 la comparación entre la posición de los picos de esta figura y las frecuencias naturales teóricas. Esta comparación muestra que, dentro de unos márgenes de error aceptables, ambos grupos de frecuencias son muy similares, por lo que el modelo en red utilizado es el adecuado.

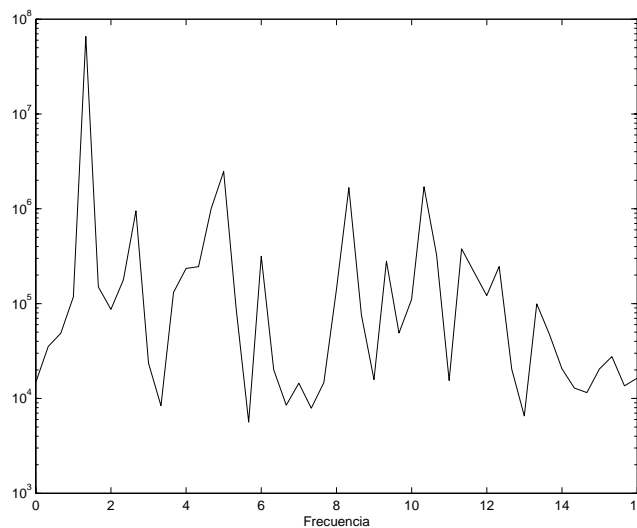


Figura 6.42. Espectro del momento de torsión en $x=0.5$ al aplicar el pulso gaussiano en $x_0=0.667$ a la barra amordazada-carga másica.

Posición de los picos del espectro	1.13	2.67	5.00	6.00	8.33	9.33
Frecuencias naturales teóricas	1.41	3.05	4.93	5.98	8.37	9.38

Tabla 6.4. Comparación entre las frecuencias de los seis primeros picos del espectro simulado de la Figura 6.42 y las seis primeras frecuencias naturales teóricas de la barra amordazada-carga másica.

6.4.- Conclusiones del capítulo

Los objetivos principales de este capítulo han sido la elaboración de las celdas elementales para la simulación con el MSR de las vibraciones transversales en una barra, tanto con el modelo de Euler-Bernoulli como con el de Timoshenko, así como el diseño de los modelos en red correspondientes a la barra apoyada en los dos extremos y a la barra amordazada-carga másica, y su validación mediante la comparación de los resultados de la simulación con las correspondientes a las expresiones y frecuencias naturales teóricas. Estos objetivos han sido conseguidos satisfactoriamente, siendo tanto las celdas elementales como los modelos en red representaciones adecuadas en el MSR de los modelos matemáticos considerados para las vibraciones transversales. La simulación con el MSR ha demostrado que es posible trabajar con este método a la hora de estudiar este proceso físico, para las vibraciones libres como para las forzadas, y, dentro de estas últimas, proporcionando buenos resultados al aplicar tipos de fuerza tan dispares como una fuerza armónica, un pulso cuadrado o gaussiano. Únicamente al estudiar variables físicas que cambian con frecuencias muy altas o de forma muy abrupta hemos encontrado diferencias importantes entre la simulaciones y las expresiones teóricas.

Un objetivo secundario de este capítulo ha sido estudiar el comportamiento vibratorio de la barra amordazada-carga másica. En el Capítulo 5 se vio como las vibraciones longitudinales de barras con condiciones de contorno simples eran completamente periódicas, mientras que al considerar una carga másica la vibración se alteraba cambiando continuamente, debido a la acción de la masa en el extremo. Sin embargo, en las vibraciones transversales, al trabajar con la barra apoyada en los dos extremos la vibración no tiene un carácter tan periódico como en las longitudinales, sino que su variación temporal no es predecible a simple vista, como ocurre en las

longitudinales. Por ello, el efecto de la carga másica es menos apreciable y no es posible establecer de una manera clara características propias y distintivas del movimiento vibratorio transversal de este tipo de barra. Aunque el hecho de que la carga másica ejerza una fuerza sobre el extremo de la barra que cambia con el tiempo de una manera no periódica, sin duda altera la vibración de la barra con respecto a cuando las condiciones de contorno son constantes en el tiempo.

REFERENCIAS

- [6.1] C.F. González-Fernández, F. Alhama, J.F. López-Sanchez J. Horno “Application of the network method to heat conduction processes with polynomial and potential-exponentially varying thermal properties”. Numerical Heat Transfer A, Applications, 33, pp. 549-559 (1998).
- [6.2] M. Alarcón “Transporte de calor en sistemas con aletas. Coeficientes de rendimiento y red de transferencia”. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena (2001).
- [6.3] F. Alhama “Estudio de respuestas térmicas transitorias en procesos no lineales de conducción de calor mediante el Método de Simulación por Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia (1999).
- [6.4] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Determination of the specific heat versus temperature under natural convection boundary condition using the network simulation method”. Eurotherm Seminar N° 68 (2001).
- [6.5] J. Zueco, F. Alhama, C.F. González-Fernández “Analysis of laminar forced convection with Network Simulation Method in thermal entrance region of ducts”. International Journal of Thermal Sciences, 43, pp. 443-451 (2004).
- [6.6] A. Moya “Estudio de procesos de transporte iónico en células electroquímicas mediante el Método de Redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1996).
- [6.7] J. Castilla, M.T. García-Hernández A. Hayas, J. Horno “Simulation of non-stationary electrodiffusion processes in charged membranes by the network approach”. Journal of Membrane Science, 116, pp. 107-116 (1996).
- [6.8] M.T. García Hernández “Simulación digital de procesos de electrodo. Método de redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1994).
- [6.9] M.T. García-Hernández, J. Castilla, C.F. González-Fernández, J. Horno “Application of the network method to simulation of a square scheme with Butler-Volmer charge transfer”. Journal of Electroanalytical Chemistry, 424, pp. 207-212 (1997).

- [6.10] J.J. López-García, A.A. Moya, J. Horno, A. Delgado and F. González-Caballero “A network model of the electrical double layer around a colloid particle”. *Journal of Colloid and Interface Science*, 183, pp. 124-130 (1996).
- [6.11] A.J. Poza, J.J. López-García, A. Hayas, J. Horno “A network simulation method for numerical solution of the nonlinear Poisson-Boltzmann equation for a spheroidal surface”. *Journal of Colloid and Interface Science*, 219, pp. 241-249 (1999).
- [6.12] A.J. Poza “Estudio del efecto de la excentricidad de las partículas cargadas sobre las propiedades eléctricas de suspensiones coloidales mediante el método de simulación por redes”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada (2000).
- [6.13] V. Zimmerman, C. Grosse “Numerical calculation of the dielectric spectra of cell-type particles”, *Journal of Physical Chemistry B*, 108, pp. 12617-12622 (2004).
- [6.14] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Análisis de la propagación de ondas elásticas por el método de resolución por redes”. XXVIII Reunión Biental de la Real Sociedad Española de Física y 11º Encuentro Ibérico para la Enseñanza de la Física, Anexo pp. 5-7, Sevilla, España (2001).
- [6.15] M.T. García-Hernández, E. Castro, A. Gallego “Vibraciones longitudinales en barras: Simulación con el método de redes”. II Encuentro del Grupo Latinoamericano de Emisión Acústica y Primero Iberoamericano. 1, pp. 49-56, Buenos Aires, Argentina (2001).
- [6.16] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Networks simulation method applied to vibration of rods”. *Forum Acusticum. Actas del congreso*, Sevilla, España (2002).
- [6.17] E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Transversal waves in beams via the network simulation method”. *Journal of Sound and Vibration*, 283, pp. 997-1013 (2005).

- [6.18] S. Ekwaro-Osire, D.H.S. Maithripala, J.M. Berg “A series expansion aproach to interpreting the spectra of the Timoshenko beam”. *Journal of Sound and Vibration*, 240, pp. 667-678 (2001).

CAPITULO 7

DETECCIÓN DE DEFECTOS MEDIANTE VIBRACIONES LONGITUDINALES

7.1.- Introducción

La presencia de defectos en una barra homogénea provoca que cambien las propiedades físicas en algunos de sus puntos, perdiendo así su homogeneidad. Esto ocasiona que sus características ondulatorias y vibratorias cambien con respecto a la barra homogénea, cambios que se pueden aprovechar para detectar dichos defectos. Tradicionalmente la detección de defectos se ha hecho estudiando los cambios en las frecuencias naturales de vibración de la barra [7.1, 7.2], analizando los cambios en los modos de vibración [7.3, 7.4] o haciendo un modelo numérico de la barra y buscando la forma de ajustarlo a los datos experimentales [7.5, 7.6]. Recientemente, sin embargo, se ha puesto de manifiesto la posibilidad del uso de la Transformada Wavelet (TW) para detectar la presencia de defectos en una barra, incluso muy pequeños, a partir del análisis de sus vibraciones.

La forma más extendida de esta técnica consiste en realizar la TW de algún modo de vibración de la barra, ya sea obteniendo el modo de vibración de la barra con defecto mediante algún método numérico (normalmente el MEF) [7.7-7.10], o imponiendo como condiciones iniciales a la barra con defecto algún modo de vibración de la barra sin defecto (vibraciones libres) [7.11]. Por otra parte, la mayoría de los trabajos existentes detectan la presencia y ubicación del defecto a partir de una señal espacial (la variable independiente es la posición a lo largo de la barra) [7.7-7.11], que habitualmente es el desplazamiento o en la aceleración en un instante fijo. Desde un punto de vista experimental, los modos propios de la barra se suelen conseguir aplicándole una fuerza senoidal de frecuencia igual a una de sus frecuencias naturales y midiendo el desplazamiento (mediante galgas extensométricas) o aceleración (mediante acelerómetros) en muchos puntos de la barra. Más concretamente, esto se puede realizar, bien colocando muchos acelerómetros sobre la barra y haciendo un solo experimento, o bien, con un solo acelerómetro colocado en diferentes puntos de la barra, ir repitiendo el experimento. En el primer caso tenemos la desventaja de alterar en exceso la masa de la barra, pero la ventaja de tener que realizar un único experimento. En el segundo, sin embargo, aunque no alteramos casi nada la masa de la barra, el proceso experimental requiere de más realizaciones.

Sea cual fuere la forma de obtener la respuesta vibracional, experimentalmente o mediante métodos numéricos, la mayoría de los trabajos parten de una señal espacial, medida en un tiempo fijo, a la cual se le hace la TW. La detección del defecto se lleva a cabo gracias a que dicha transformada presenta un pico justo en la posición del defecto. Por tratar con señales espaciales, a este tipo de procedimiento se le denomina Wavelet Espacial.

Sin embargo, son muy pocos los trabajos en los que se ha aplicado esta técnica a vibraciones forzadas de barras o estructuras más complejas, aún cuando estas vibraciones son más fáciles de generar experimentalmente. No obstante, existen algunos trabajos donde se ha presentado la detección de defectos mediante la Wavelet Espacial para situaciones estáticas, es decir, con cargas estáticas aplicadas [7.12].

Mucho menos frecuente es encontrar en la bibliografía trabajos sobre la aplicación de la TW a la detección de defectos a partir de señales temporales. Es decir, a partir de la señal de vibración medida a lo largo del tiempo en un punto concreto de la

barra o estructura [7.13], aún cuando esto, desde un punto de vista experimental es mucho más cómodo, pues además de requerirse un solo sensor de medición, puede realizarse en un solo experimento. Quizás la razón es la dificultad que presenta la detección del defecto a partir de estas señales temporales, y aún más su localización. A este procedimiento, por analogía, se le llama Wavelet Temporal.

En este capítulo hemos abarcado todas las posibilidades, tanto en el tipo de vibraciones, libres y forzadas, como en el tipo de señales sometidas a análisis, espaciales (a un tiempo fijo) y temporales (en una posición fija). Obviamente, en todos los casos hemos considerado vibraciones longitudinales en barras, que hemos obtenido numéricamente mediante el MSR.

El capítulo se estructura de la siguiente forma. En primer lugar mostramos como con el MSR es posible modelar con extrema facilidad dos tipos de defectos habituales en la bibliografía: disminuciones en la densidad y en la rigidez de la barra. Posteriormente, hemos dividido el capítulo en los dos tipos de vibraciones:

- Vibraciones libres

- Vibraciones forzadas

Asimismo, en ambos casos hemos considerado la detección del defecto a partir de dos tipos de señales de vibración:

- Señales espaciales

- Señales temporales

Las vibraciones libres consisten en hacer vibrar a las barras defectuosas únicamente a partir de la imposición de unas condiciones iniciales, sin someterlas a ninguna fuerza externa (de ahí el calificativo de libres). Si, en particular, estas condiciones iniciales coinciden con los modos de vibración de las barras sin defecto, la respuesta de las barras defectuosas corresponderá, en muy buena aproximación, con sus modos de vibración, pues los defectos, cuando son pequeños, introducen pocos cambios en los modos de vibración de bajo orden. Es decir, estaremos considerando vibraciones naturales.

Para el primer caso tratado, vibraciones libres con señales espaciales (el más común en la bibliografía), hemos realizado un más amplio análisis de la capacidad de detección de defectos con la técnica propuesta. Este análisis incluye un estudio sobre la influencia de varios factores clave: el tipo de función wavelet base (esto se hace sobre barras con uno, dos y tres defectos), la escala de la función base usada, la cercanía del defecto al extremo, la existencia de más de dos defectos, la cercanía de dos defectos entre sí, y, sobre todo, el orden del modo de vibración utilizado. A este último respecto, presentamos un exhaustivo análisis para los dos tipos de defecto, con conclusiones novedosas respecto de las publicaciones existentes.

Para las vibraciones forzadas hacemos un estudio en función del tipo de fuerza aplicada, considerando fuerzas senoidales de diferente frecuencia y fuerzas tipo pulso gaussiano.

7.2.- Modelado de defectos con el MSR: cambios de densidad y rigidez

El MSR permite modelar defectos puntuales mediante el cambio de alguno de los parámetros del circuito en una celda elemental. Para ello, tendremos en cuenta que para vibraciones longitudinales, en cada celda elemental (véase las Figuras 5.2 y 5.3):

-Los valores del condensador y de la bobina están directamente relacionados con la inercia del elemento de la barra, es decir, con su densidad.

-Las resistencias eléctricas en los extremos de la celda están relacionadas con la rigidez de la barra, es decir, con su módulo de Young.

Por tanto, los cambios locales en la densidad o la rigidez de la barra se corresponden con cambios de estos parámetros eléctricos de la celda elemental en la que esté situado el defecto. Lógicamente, la extensión de daño más pequeña que podemos considerar en nuestro modelo en red es el ancho de celda, Δx . Consideraremos dos tipos de defectos, un cambio de densidad y un cambio de rigidez, ya que son las características físicas que influyen fundamentalmente en la vibración de una barra. Además, son defectos bastante comunes que tienen un gran interés práctico, ya que pueden producirse a causa de corrosión, fracturas, etc.

En particular, si consideramos n_d la celda a la que afecta el defecto, su posición será $x_d = n_d \Delta x$. Por lo tanto, en el caso de una barra con un defecto que afecte a la densidad, este se modelará variando el valor de la capacidad y de la autoinducción del circuito auxiliar de la celda n_d . Por tanto, los parámetros de los circuitos de las Figuras (5.2) y (5.3) vendrán dados por:

$$\begin{aligned}
 R_{i \pm \Delta} &= \frac{\Delta x}{2E} & \forall i = 1 \dots N \\
 C_i = L_i &= \sqrt{\rho \Delta x} & \text{si } i \neq n_d \\
 C_{n_d} = L_{n_d} &= \sqrt{\rho_d \Delta x}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde ρ es la densidad de la barra sin defecto y ρ_d la densidad de la barra donde hay defecto.

Por otra parte, si la barra tiene un defecto en la rigidez, éste se podrá modelar variando el valor de las resistencias de la celda elemental n_d , con lo que los parámetros de estos circuitos serán:

$$\begin{aligned}
 R_{i \pm \Delta} &= \frac{\Delta x}{2E} & \text{si } i \neq n_d \\
 R_{n_d \pm \Delta} &= \frac{\Delta x}{2E_d} \\
 C_i = L_i &= \sqrt{\rho \Delta x} & \forall i = 1 \dots N
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde E es el módulo de Young de la barra sin defecto e E_d el módulo de Young de la barra donde hay defecto.

Otro aspecto importante para caracterizar el defecto es su cuantificación. Para el caso de un defecto tipo densidad, este puede cuantificarse mediante la relación entre ρ y ρ_d , definiendo la intensidad de defecto como:

$$Id(\%) = 100 \frac{\rho - \rho_d}{\rho} \tag{7.3}$$

Para un defecto en la rigidez, la intensidad de defecto está definida como:

$$Ir(\%) = 100 \frac{E - E_d}{E} \quad (7.4)$$

Habitualmente, los defectos reales proporcionan disminuciones de densidad y/o rigidez, en cuyo caso los valores de Id e Ir serán positivos. Para dar mayor generalidad a los resultados, trabajaremos con variables adimensionales, por lo que todos los parámetros de la barra sin defecto tendrán valor unidad: longitud de la barra, superficie, densidad y módulo de Young. De este modo, una barra con un punto en el que la densidad es 0.99, y que, por tanto, ha sufrido una disminución de 0.01, diremos que tiene un defecto de intensidad $Id=1\%$ (nótese que la densidad de la barra sin defecto es 1). De la misma forma, una barra con un punto en que el módulo de Young sea 0.99, diremos que tiene un defecto en su rigidez con intensidad $Ir=1\%$.

7.3.- Detección de defectos mediante vibraciones libres

Al ser una de las características distintivas de un sistema mecánico, los modos de vibración se han usado durante mucho tiempo para detectar la presencia de defectos o fracturas y descubrir irregularidades. Las formas más habituales de trabajar consisten en la elaboración de un modelo numérico del sistema a estudiar y el ajuste de los parámetros de este modelo de forma que coincidan con los valores experimentales obtenidos, o en estudiar los cambios que se producen en sus modos de vibración, por ejemplo el acercamiento de los nodos hacia el defecto [7.3, 7.4]. Esto último permite detectar la presencia del defecto (Nivel 1) y localizarlo (Nivel 2) de una manera un tanto imprecisa, ya que solo se puede saber que el defecto se encuentra entre los dos nodos que se desplazan. En general, a la disciplina que estudia los cambios en los modos de vibración se le conoce como “Análisis Modal”.

La TW, sin embargo, posibilita detectar y localizar defectos utilizando los modos de vibración de la barra de una forma más precisa y elegante: directamente a partir de los datos medidos, sin necesidad de tener que elaborar un modelo numérico. Esta técnica se basa en el hecho de que el defecto produce una perturbación en el modo de vibración de la barra, la cual, aunque imperceptible a simple vista, puede ser detectada mediante este procesado de señal. Además, como es lógico, la perturbación es

mayor en el lugar donde se encuentra el defecto, por lo que si somos capaces de descubrirla tendremos también localizado el defecto. La TW es muy sensible a los cambios y a las irregularidades de una señal, por lo que resulta una herramienta muy útil para nuestro propósito. Sin embargo, dado que es una herramienta matemática que ha sido elaborada y desarrollada hace relativamente pocos años, su uso en este contexto no se ha investigado lo suficiente y no está aún muy extendida.

Como hemos indicado en la introducción del capítulo, hemos dividido nuestro estudio en dos casos:

-Con señales espaciales: Utilizando como señal de trabajo la vibración a lo largo de la barra en un tiempo fijo. La variable independiente es la posición sobre la barra.

-Con señales temporales: Utilizando como señal de trabajo la vibración a lo largo del tiempo en una posición fija. La variable independiente es el tiempo.

7.3.1.- Con señales espaciales

Consideremos una barra sin defecto de longitud, densidad y módulo de Young normalizados a 1, la cual está simplemente apoyada, es decir con sus dos extremos fijos, $\xi(0,t)=0$ y $\xi(1,t)=0$. La situación puede simularse mediante el MSR cortocircuitando el primer nodo de la celda 1 y el último de la celda N . Para esta barra, su n -ésimo modo propio para vibraciones longitudinales viene dado teóricamente por:

$$Y_n(x) = \text{sen}(\beta_n x)$$

$$\beta_n = n \frac{\pi}{L} \quad (7.5)$$

Por otro lado, consideremos otras dos barras con un defecto situado en la celda $n_d=71$, es decir, en la posición $x_d=0.4767$. En una de ellas el defecto es tipo densidad con $Id=0.1\%$, y en la otra, el defecto es tipo rigidez con $Ir=0.1\%$. La Figura 7.1 representa el modelo en red para las vibraciones longitudinales de estas barras con defecto. En este caso, no es posible obtener teóricamente los modos de vibración, por lo que deben obtenerse numérica o experimentalmente. Sin embargo, sí que podemos obtener, mediante el modelo en red de la Figura 7.1, las vibraciones libres de estas

barras para unas condiciones iniciales determinadas. En particular, a la barra con defecto podemos aplicarle como condiciones iniciales sobre el desplazamiento, el modo n -ésimo de la barra sin defecto, dado por la ecuación 7.5, es decir, podemos imponer que:

$$\xi_n^d(x,0) = Y_n(x) \quad (7.6)$$

donde ξ_n^d representa el desplazamiento de la barra con defecto cuando se usa el modo de vibración n de la barra sin defecto como condición inicial. Esto es posible realizarlo mediante el MSR sin más que imponer sobre el circuito de la Figura 7.1 que el voltaje en $t=0$ en los nodos centrales de las $N=150$ celdas en las que vamos a dividir la barra, sea:

$$\Phi_i(t=0) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} i \Delta x\right) \quad i = 1 \dots N \quad (7.7)$$

Con esta condición inicial podemos resolver el circuito de la Figura 7.1, obteniendo así la respuesta vibracional de la barra defectuosa, $\xi_n^d(x,t)$, en toda posición y tiempo.

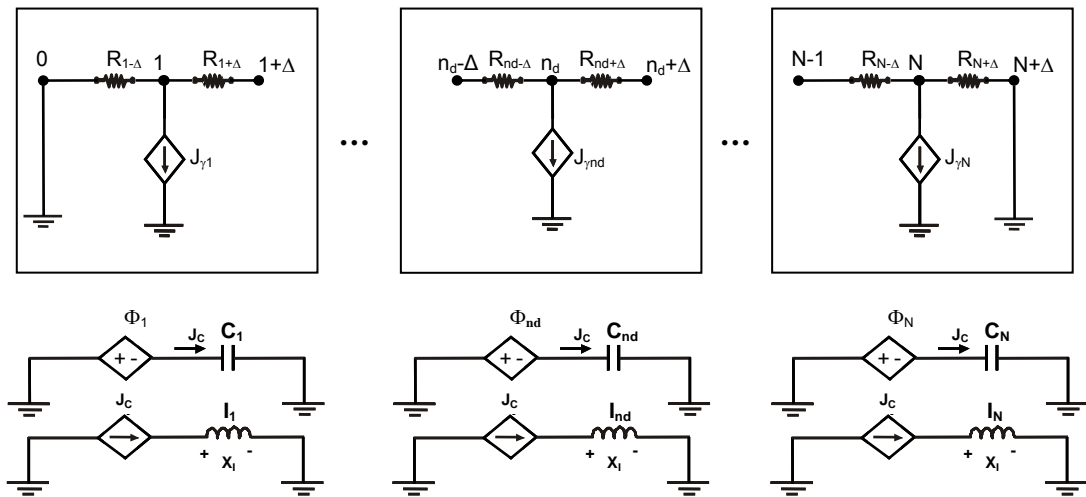


Figura 7.1. Modelo en red para las vibraciones longitudinales de una barra simplemente apoyada, con un defecto en la posición x_d .

La Figura 7.2 representa $\xi_1^d(x,t)$ para dos barras con un defecto, una con $Id=0.1\%$ y otra con $Ir=0.1\%$, donde el desplazamiento se ha evaluado en el tiempo en el que este alcanza su valor máximo en todas las posiciones. Como vemos, se trata de una

señal espacial (la variable independiente es la posición sobre la barra), que notaremos de manera simplificada por $\xi_n^d(x)$, correspondiente al modo n y a la barra con defecto, y que cuenta con 150 muestras (el número, N , de celdas usadas en la simulación numérica). En la misma Figura 7.2 se ha representado también el primer modo de vibración de la barra sin defecto, $Y_1(x)$, que notaremos en general por $\xi_n^{sd}(x) = Y_n(x)$ para un modo arbitrario n .

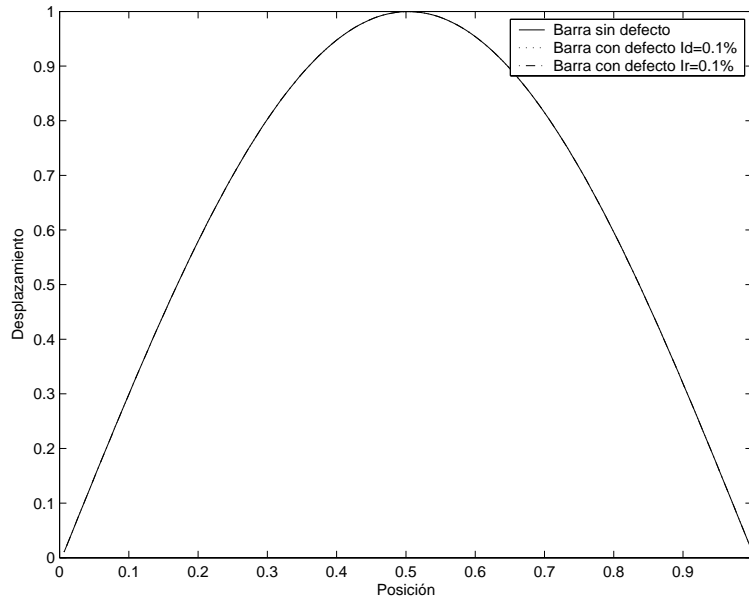


Figura 7.2. Primer modo de vibración de una barra sin defecto, $\xi_1^{sd}(x)$. Respuesta vibracional libre de una barra con un defecto en la intensidad ($\xi_1^d(x)$, $I_d=0.1\%$) y otra con un defecto en la rigidez ($\xi_1^d(x)$, $I_r=0.1\%$), situados en $x_d=0.4767$.

Se puede ver que las tres gráficas de la Figura 7.2 son prácticamente indistinguibles entre sí, de lo que se deduce que a partir de la mera observación de ellas es imposible identificar la presencia del defecto, y menos aún su ubicación. La razón es básicamente el pequeño tamaño del defecto, tanto en extensión como en intensidad, por lo que no afecta de forma evidente a las vibraciones libres y naturales de baja frecuencia. Es decir, las barras dañadas e intactas tienen prácticamente los mismos modos de vibración, especialmente los modos de orden bajo. Se hace necesaria, por tanto, la utilización de algún tratamiento de estas señales para revelar la diferencia entre ellas, y por tanto detectar y localizar el defecto. En este capítulo se propone una técnica para detectar la presencia del defecto y localizarlo, basada en el uso de la Transformada Wavelet explicada teóricamente en el Capítulo 4.

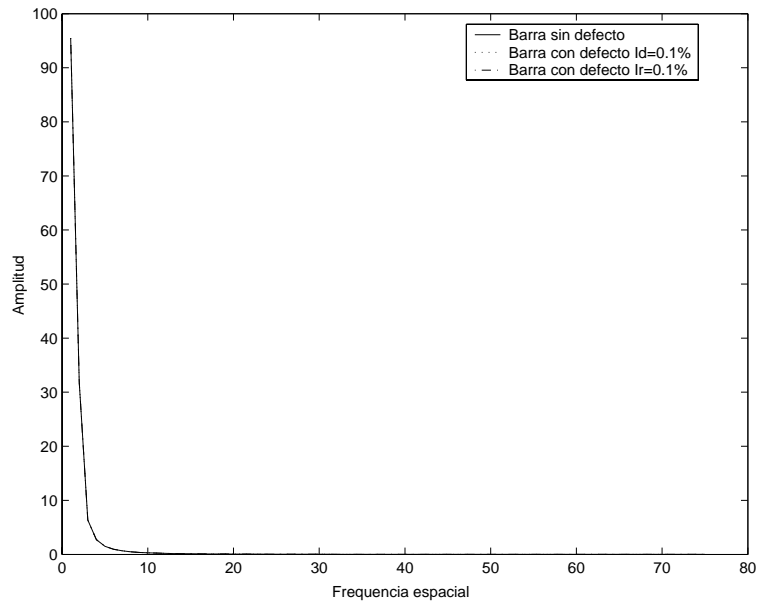


Figura 7.3. Transformada de Fourier del primer modo de vibración de una barra sin defecto, y de la respuesta vibracional libre de una barra con un defecto en la intensidad ($I_d=0.1\%$) y otra con un defecto en la rigidez ($I_r=0.1\%$), situados en $x_d=0.4767$.

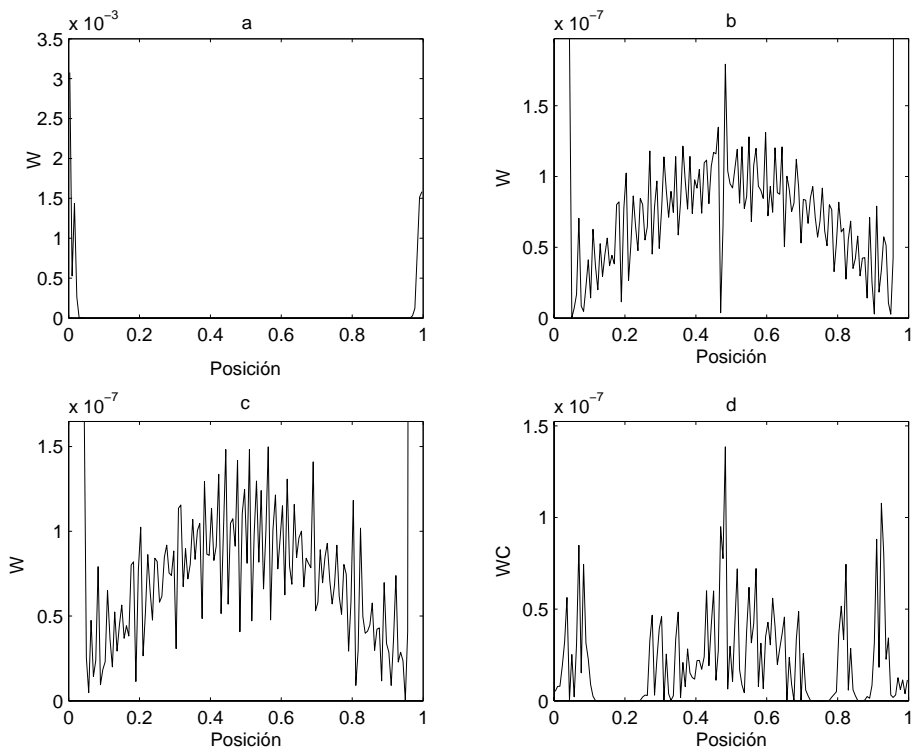


Figura 7.4. a) $W_1^d(x,2)$ con $I_d=0.1\%$. b) $W_1^d(x,2)$ con $I_d=0.1\%$, ampliada con un cambio en el eje de ordenadas. c) $W_1^{sd}(x,2)$. d) $WC_1(x,2)$. En todas se ha usado la función base Symmlet-4. Posición del defecto $x_d=0.4767$.

Es bien conocido que el análisis de Fourier es una herramienta matemática extremadamente útil para transformar una señal desde el dominio del tiempo al de la frecuencia (nótese, que en nuestro caso, las señales no son función del tiempo, sino de la posición). Sin embargo, tiene la gran limitación de perder toda la información relativa a la variable independiente (ya sea el tiempo o la posición). Por ejemplo, la Figura 7.3 muestra la Transformada de Fourier de las señales $\xi_1^d(x)$ y $\xi_1^{sd}(x)$ de la Figura 7.2, correspondientes al primer modo de vibración de las barras con y sin defecto. Puede verse que las dos gráficas coinciden totalmente, puesto que las frecuencias naturales de vibración de ambas barras son casi idénticas. De esto se deduce que el análisis de Fourier no es una técnica muy adecuada para detectar y localizar daño a partir de la medida de modos propios de vibración de orden bajo. En general, el análisis de Fourier no es adecuado para detectar características no estacionarias o transitorias de una señal, tales como cambios abruptos, los cuales aparecen en las señales de vibración de barras localmente dañadas.

Para superar esta limitación se han aplicado diferentes técnicas de señal, siendo la Transformada Wavelet la que mejores prestaciones ha mostrado, por las razones explicadas en el Capítulo 4. Aquí, mostramos su potencial, aplicándola a los datos obtenidos numéricamente mediante el MSR.

Dadas las señales de desplazamiento de la barra con defecto, $\xi_n^d(x)$, y de la barra sin defecto, $\xi_n^{sd}(x)$, podemos calcular su TW continua, tal y como se expuso en el Capítulo 4. Llamaremos a estas transformadas $W_n^d(x,j)$ y $W_n^{sd}(x,j)$, respectivamente, que son funciones de la posición a lo largo de la barra, x , y de la escala, j , de la función wavelet utilizada.

La Figura 7.4-a representa $W_1^d(x,2)$ calculada con la función base Symmlet-4 para una barra con defecto en la densidad situado en la posición $x_d=0.4767$ y con intensidad $Id=0.1\%$. Observamos que a simple vista no se aprecia nada destacable salvo que la amplitud aumenta enormemente al acercarnos a los dos extremos de la barra. Sin embargo, si ampliamos la zona central mediante un cambio de escala en el eje de ordenadas, se observa la presencia de un pico muy destacado justo en la posición del defecto (Figura 7.4-b). Esto demuestra claramente la utilidad de la TW para la determinación y ubicación del defecto, incluso siendo éste de pequeña intensidad (un 0.1%).

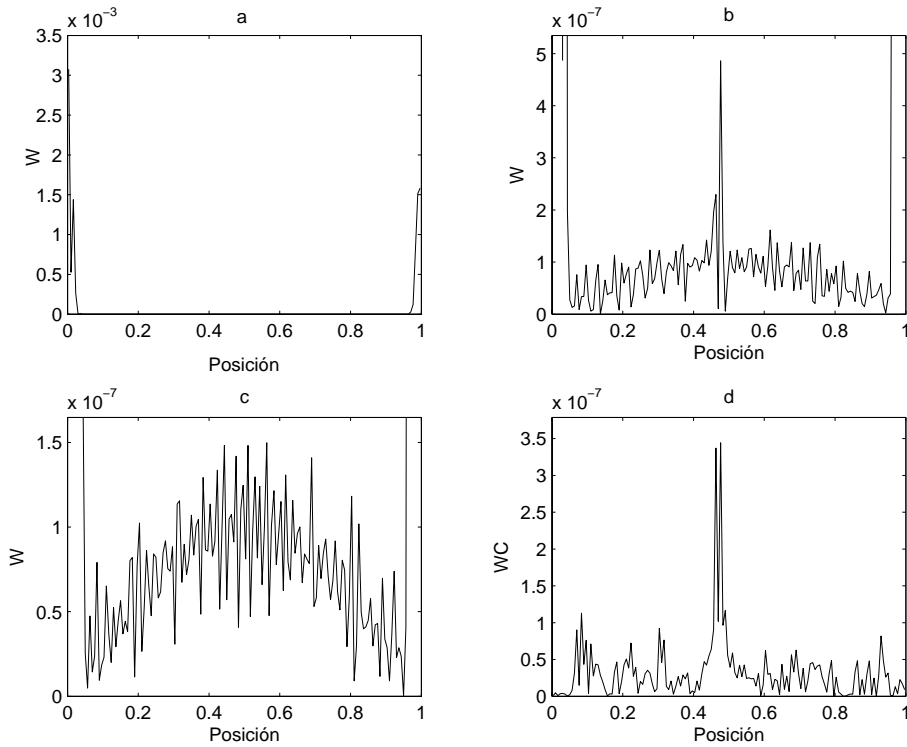


Figura 7.5. a) $W_1^d(x,2)$ con $Ir=0.1\%$. b) $W_1^d(x,2)$ con $Ir=0.1\%$ ampliada con un cambio en el eje de ordenadas. c) $W_1^{sd}(x,2)$. d) $WC_1(x,2)$. En todas se ha usado la función base Symmlet-4. Posición del defecto $x_d=0.4767$.

La existencia de los dos grandes picos en los extremos de la barra ($x=0$ y $x=1$) es algo que aparece siempre, tenga o no defectos la barra, y que recibe el nombre de “distorsión de borde”. Básicamente, lo que sucede es que la TW detecta también en estos puntos dos grandes discontinuidades en la señal de desplazamiento (mucho más grandes que las que produce el defecto), lo que nos indicaría la existencia de falsos defectos en los extremos de la barra. La distorsión de borde es un problema que aparece inevitablemente al trabajar con la TW en la detección de daño y que puede aminorarse bajando la escala del eje de ordenadas, tal y como se ha hecho en la Figura 7.4-b. Sin embargo, en esta Memoria proponemos una estrategia diferente que consiste en usar como función de detección la diferencia entre la TW de la señal de la barra dañada y la TW de la señal de la barra sin daño, es decir, la función:

$$WC_n(x, j) = \left| W_n^d(x, j) - W_n^{sd}(x, j) \right| \quad (7.8)$$

Este procedimiento tiene la ventaja de permitir detectar defectos cerca de los extremos. En la Figura 7.4-c se muestra la TW de la señal de la barra sin defecto, $W_1^{sd}(x,2)$, que

como vemos también presenta la distorsión de borde y obviamente no presenta ningún pico en la posición del defecto. En la Figura 7.4-d se muestra $WC_1(x,2)$, en la que como vemos ya no aparece esta distorsión de borde y sí un prominente pico justo en la posición del defecto.

La Figura 7.5 muestra el mismo ejemplo pero para una barra con un defecto en la rigidez situado en la misma posición y con intensidad $Ir=0.1\%$. Vemos que las conclusiones comentadas anteriormente son totalmente similares para este tipo de defecto.

7.3.1.1- Influencia del tipo de función base

Obviamente los resultados obtenidos al aplicar la TW pueden variar con la función base usada. Por ello hemos considerado pertinente hacer un estudio preliminar de la influencia de la función base elegida, en el problema de la detección de defectos con señales de vibración. En principio, teniendo en cuenta lo comentado en el Capítulo 4, dado que lo que vamos a hacer es buscar detalles y detectar singularidades en una señal, la función base que usemos deberá tener el mayor número posible de momentos nulos. Por otro lado, dado que estas singularidades estarán localizadas en puntos concretos y, por regla general, no se extienden sobre regiones grandes, la función deberá tener un soporte lo más compacto posible para poder localizar mejor la irregularidad. Por desgracia, estas dos características son contrapuestas, ya que cuantos más momentos nulos tenga una función base, mayor será su soporte, y viceversa. En definitiva, hay que llegar a un compromiso.

Al realizar una revisión bibliográfica encontramos que prácticamente cada autor usa una función base diferente, afirmando la mayoría que la han elegido tras probar con muchas diferentes, siendo quizás las funciones más usadas las que tienen cuatro momentos nulos, como la Symmlet-4 (Sym4) o la Daubichie-4 (Db4).

Nosotros hemos realizado nuestro propio estudio, con el ánimo de fijar con qué función base resulta más conveniente trabajar. Este estudio lo hemos llevado a cabo sobre tres ejemplos, con uno, dos y tres defectos sobre la barra, respectivamente.

a.- Estudio con un defecto en la densidad

En la primera parte, hemos analizado la capacidad de las distintas funciones base para detectar la presencia de un defecto tipo densidad en la posición $x_d=0.4767$. Dado el gran número de funciones que existen, sería muy extenso y tedioso presentar aquí los resultados obtenidos con todas ellas, por lo que mostraremos únicamente los obtenidos con algunas de las más usadas en la bibliografía, recordando que nuestro estudio no se ha restringido únicamente a éstas, sino que ha sido bastante más amplio.

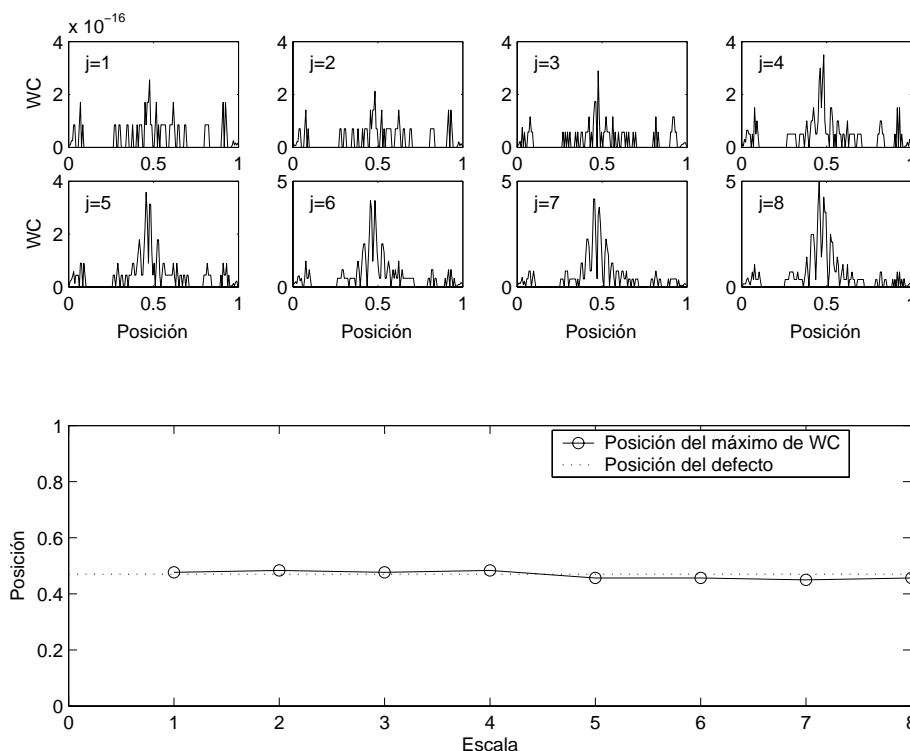


Figura 7.6. Arriba: $WC_1(x,j=1:8)$ con función base Haar. Abajo: Posición del máximo de $WC_1(x,j=1:8)$. Posición del defecto: $x_d=0.4767$. $Id=0.1\%$.

La primera función base que hemos aplicado es la de Haar, una de las más simples. En la Figura 7.6 se muestran los resultados obtenidos con esta función base, en el caso del primer modo de vibración ($n=1$). En parte superior de la figura se representa $WC_1(x,j)$ para diferentes escalas desde $j=1$ hasta $j=8$. Vemos que para la mayoría de las escalas aparece un pico en la posición del defecto ($x_d=0.4767$). En la parte inferior de la figura se muestra la posición del máximo de $WC_1(x,j)$ para cada valor de j , junto con una línea discontinua que señala la posición real del defecto. Se ve que con esta función base se localiza correctamente el defecto, aunque es un poco difícil poder decir con

seguridad si realmente existe un defecto, pues el pico más alto no destaca demasiado respecto del resto de los picos, considerados como ruido.

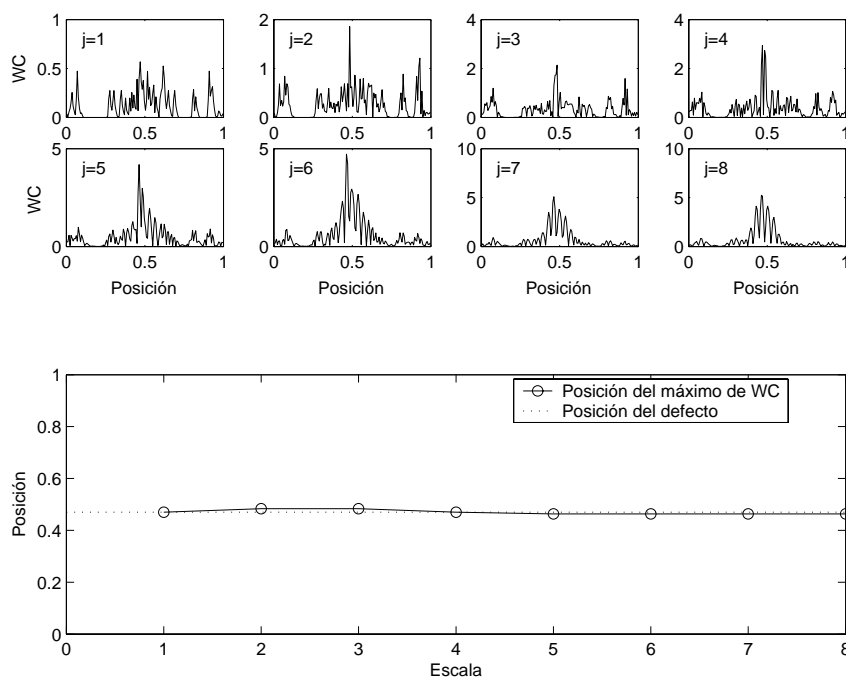


Figura 7.7. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Db4. Abajo: Posición del máximo de $WC_1(x, j=1:8)$.

Posición del defecto: $x_d=0.4767$. $Id=0.1\%$.

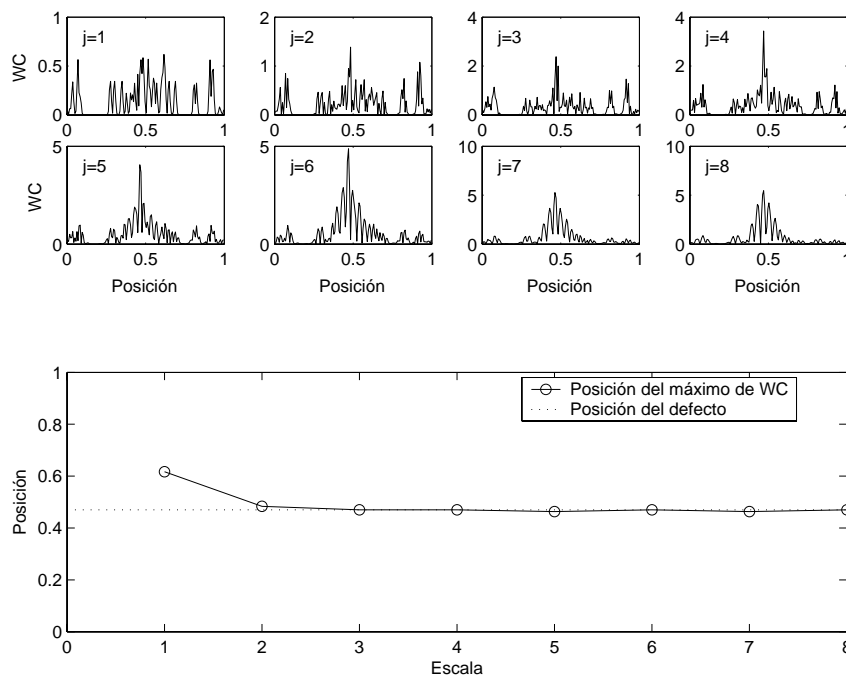


Figura 7.8. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Sym4. Abajo: Posición del máximo de $WC_1(x, j=1:8)$.

Posición del defecto: $x_d=0.4767$. $Id=0.1\%$.

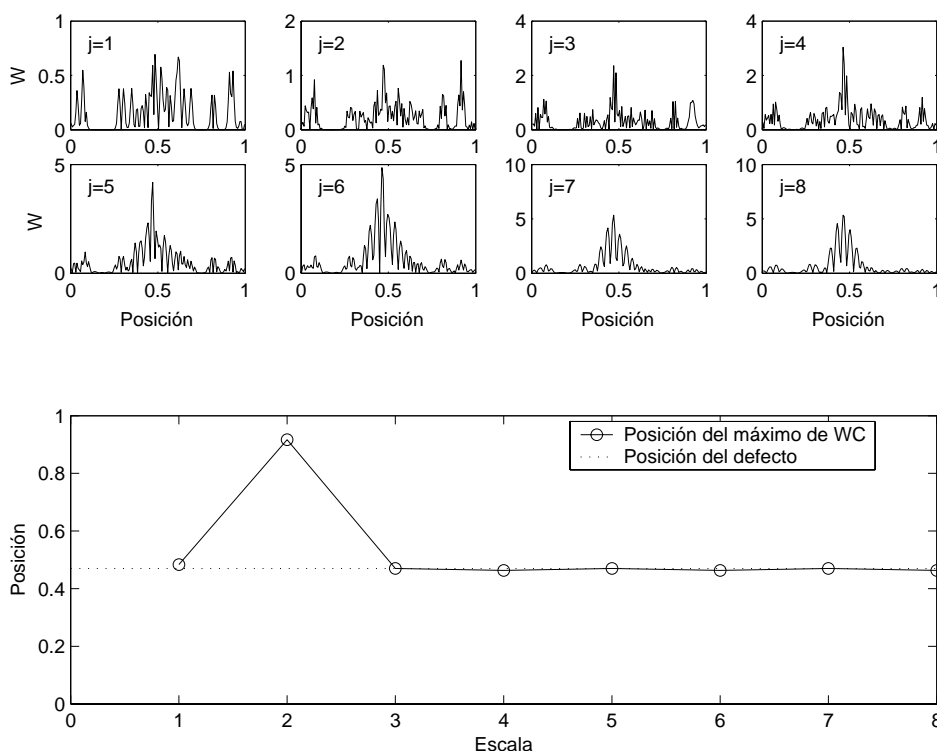


Figura 7.9. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Rbio6.8. Abajo: Posición del máximo de $WC_1(x, j=1:8)$. Posición del defecto: $x_d=0.4767$. $Id=0.1\%$.

Las Figuras 7.7, 7.8 y 7.9 muestran los mismos resultados para las funciones base Db4, Sym4 y Reverse-biorthogonal-6.8 (Rbio6.8). En general, se puede ver que todas las funciones base proporcionan resultados muy similares, no apreciándose diferencias significativas entre ellas en cuanto a la detección y localización del defecto. Se observa también que al aumentar la escala, los lóbulos de los picos de la función WC son cada vez más anchos, disminuyendo por tanto la resolución de la técnica para localizar el defecto.

b.- Estudio con dos defectos en la densidad

Otro aspecto importante a considerar para la comparación entre las distintas funciones base es la discriminación entre defectos muy cercanos. En las Figuras 7.10 y 7.11 se muestran los resultados obtenidos para las funciones base Haar y Sym4, en una barra con dos defectos separados 0.033 entre sí. En las figuras superiores se muestra $WC_1(x, j)$ para diferentes escalas. En la inferior se muestra, en un diagrama de contornos, la función $WC_1(x, j)$ frente a la posición y la escala. Se observa que con las dos funciones

base aparecen dos picos que indican la presencia de los dos defectos, siendo quizás mejor para distinguirlos la función base Haar, especialmente para altas escalas.

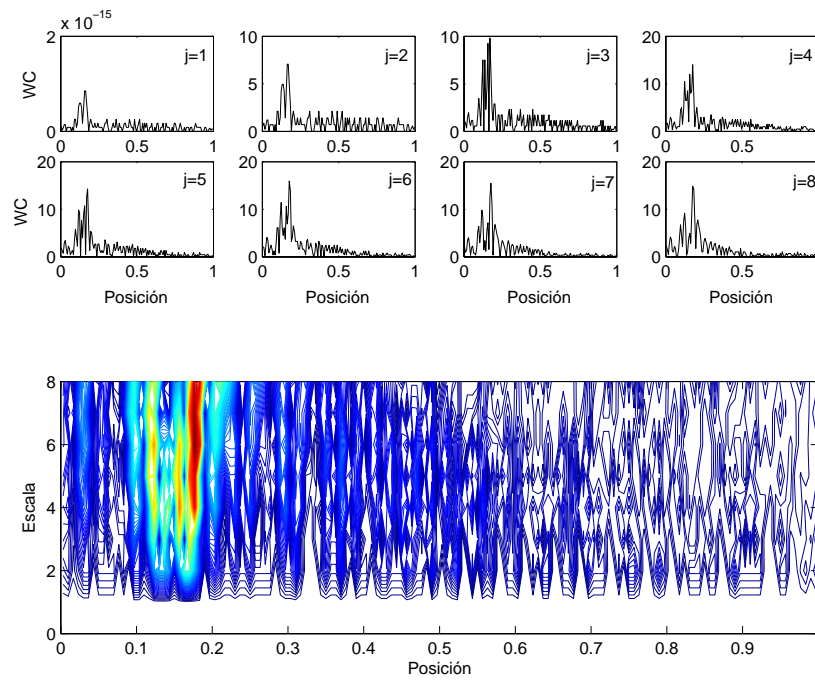


Figura 7.10. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Haar. Abajo: $WC_1(x, j)$. Posición de los defectos: $x_d=0.13$ y $x_d=0.163$. $Id=0.1\%$.

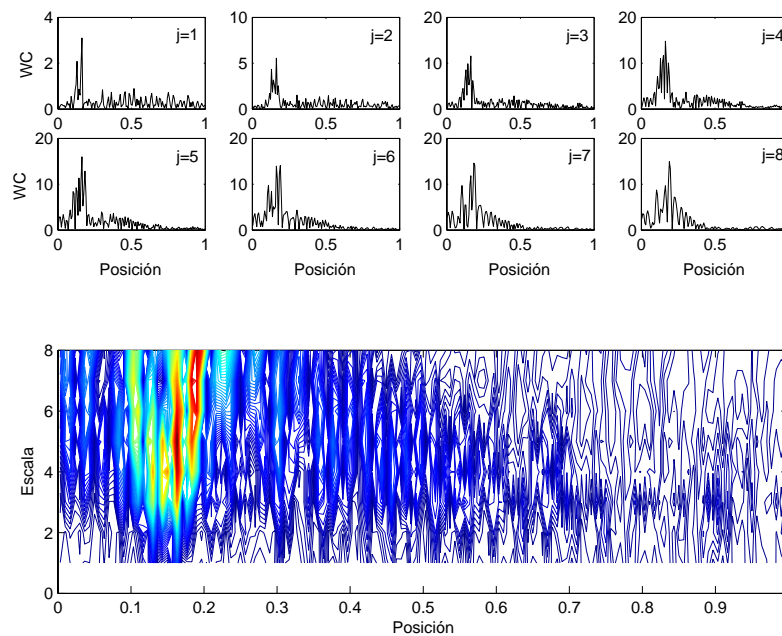


Figura 7.11. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Sym4. Abajo: $WC_1(x, j)$. Posición de los defectos: $x_d=0.13$ y $x_d=0.163$. $Id=0.1\%$.

c.- Estudio con tres defectos en la densidad

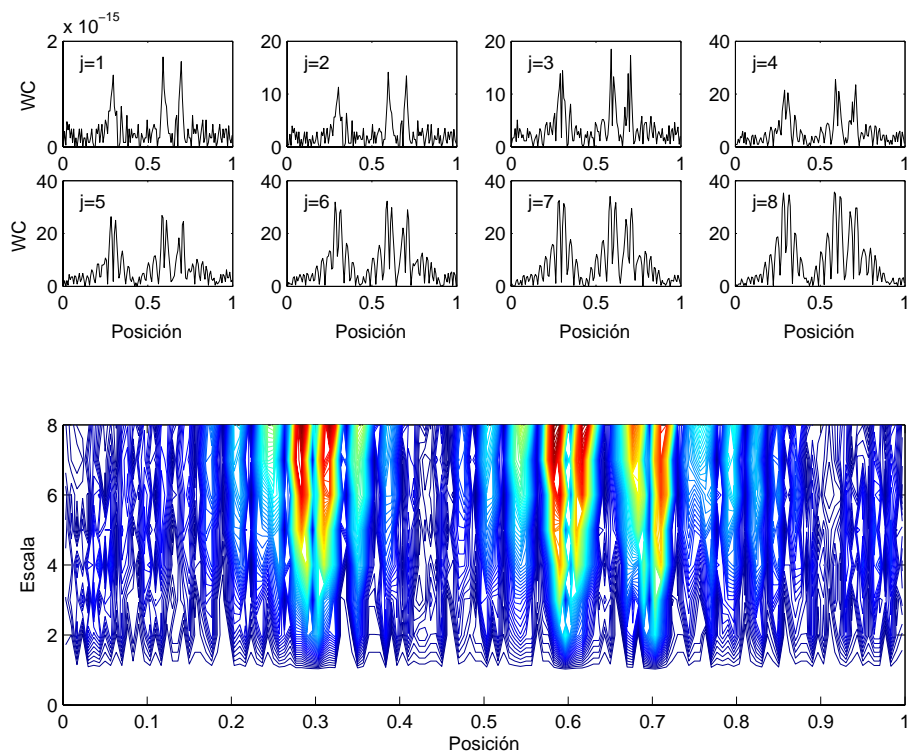


Figura 7.12. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Haar. Abajo: $WC_1(x, j)$. Posición de los defectos:

$$x_d=0.3, x_d=0.6 \text{ y } x_d=0.7. Id=0.1\%.$$

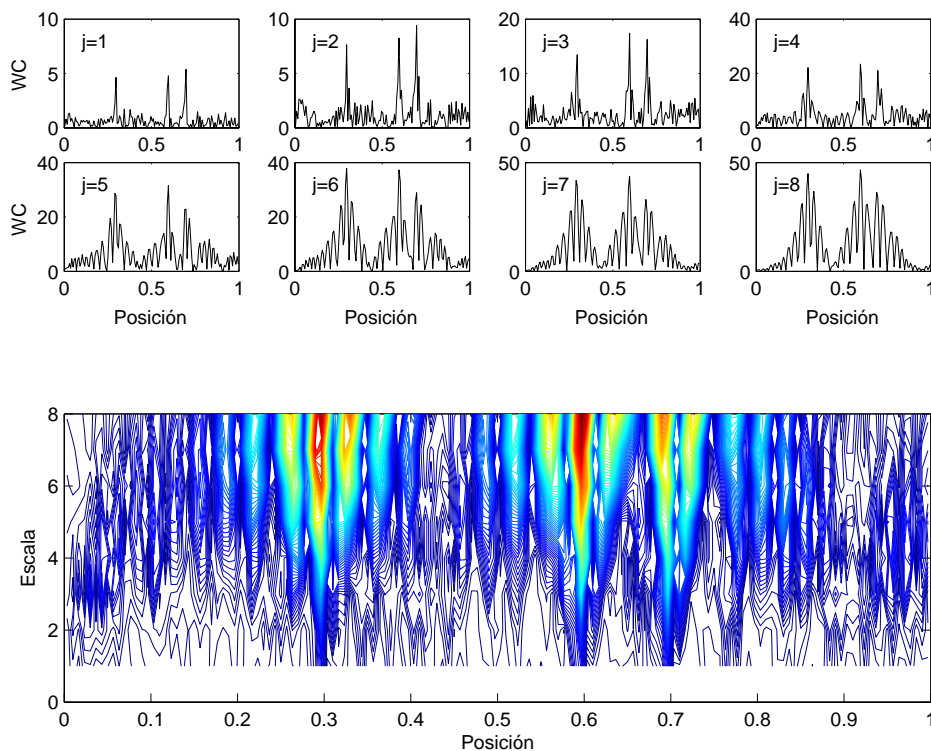


Figura 7.13. Arriba: $WC_1(x, j=1:8)$ con función base Sym4. Abajo: $WC_1(x, j)$. Posición de los defectos:

$$x_d=0.3, x_d=0.6 \text{ y } x_d=0.7. Id=0.1\%.$$

Aparte de la capacidad de discriminación entre defectos cercanos, es interesante estudiar también el caso de defectos algo más separados entre sí y dispuestos de forma irregular a lo largo de la barra. En este apartado, se presentan los resultados para un ejemplo con tres defectos tipo densidad situados en las posiciones $x_d=0.3$, 0.6 y 0.7 . En las Figuras 7.12 y 7.13 aparecen los resultados obtenidos al usar de nuevo las funciones Haar y Sym4. Vemos igualmente que los resultados son muy similares, aunque quizás sea la wavelet Sym4 la que mejor se comporte en este caso, especialmente para bajas escalas.

d.- Decisión sobre el tipo de función base a usar

Tras los resultados aquí presentados y otros muchos obtenidos y que por brevedad omitimos en esta Memoria, hemos llegado a la conclusión de que no existen diferencias significativas entre ellas, siendo la gran mayoría aptas para nuestros propósitos, lo que por otra parte, puede explicar la gran variedad de funciones base usadas en la bibliografía. No obstante, entre todas las funciones base analizadas, la Sym4 nos ha parecido que en general proporciona los mejores y más estables resultados, por lo que será con la que trabajaremos de aquí en adelante.

7.3.1.2- Influencia de la escala

Otro parámetro importante en el uso de la TW es la escala, pues los resultados pueden variar considerablemente según su valor. No obstante, entre escalas cercanas no suele haber mucha diferencia. Teniendo en cuenta lo expuesto en el Capítulo 4, la escala es una medida del grado de detalle que queremos obtener de la señal, de tal forma que a menor escala obtendremos detalles más pequeños, mientras que a mayor escala se resaltarán más los grandes rasgos de la señal. Por ello, en principio, podemos afirmar que para nuestro propósito de detección de daño local las escalas más pequeñas deben ser más apropiadas. No obstante, resulta interesante realizar un estudio sobre cómo varían los resultados en función de la escala.

a.- Defecto tipo densidad

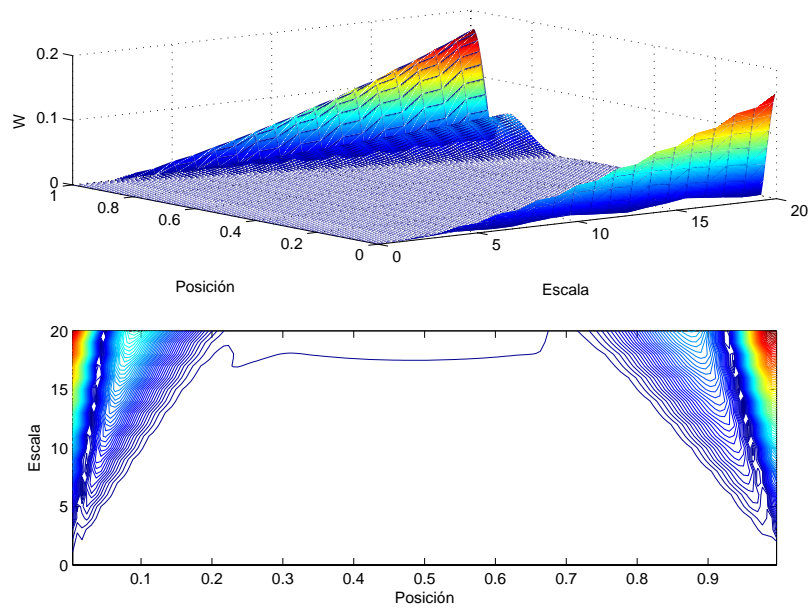


Figura 7.14. $W_1^d(x,j)$ para una barra con un defecto con $Id=0.1\%$ en función de la escala y la posición. Arriba: Representación tridimensional; Abajo: Representación en líneas de contorno. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

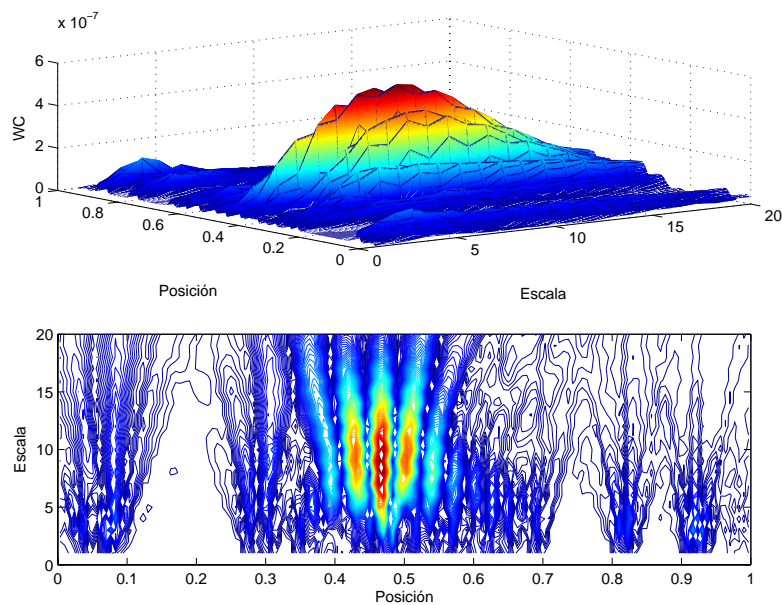


Figura 7.15. $WC_1(x,j)$ para una barra con un defecto con $Id=0.1\%$ en función de la escala y la posición. Arriba: Representación tridimensional; Abajo: Representación en líneas de contorno. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

En la Figura 7.14 se muestra la representación gráfica de $W_1^d(x,j)$ en función de la posición y la escala, para una barra con un defecto tipo densidad ($Id=0.1\%$) en la

posición $x_d=0.4767$. Puede observarse que para todas las escalas aparecen picos de amplitud muy alta en los bordes, que además se hacen más anchos conforme aumenta la escala. En la Figura 7.15 se muestra para este mismo ejemplo la función $WC_1(x,j)$, en la que como vemos, además de desaparecer la distorsión de borde, para la mayoría de las escalas aparecen picos prominentes justo en la posición del defecto. Se observa que el máximo absoluto de la función $WC_1(x,j)$ se presenta para la escala $j=9$. A muy bajas escalas ($j=1$ o $j=2$), la amplitud del pico es muy pequeña, aunque éste se encuentra muy localizado en la posición del defecto. A altas escalas (desde $j=15$ hasta $j=20$), además de tener una amplitud baja, los picos son muy anchos, es decir, muy poco localizados.

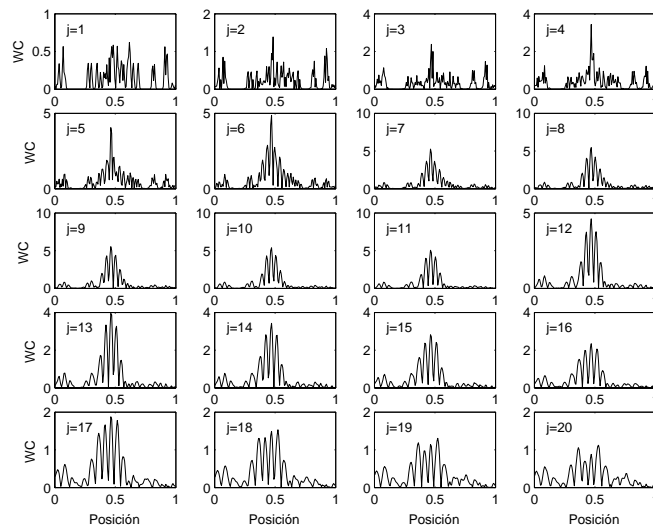


Figura 7.16. $WC_1(x,j=1:20)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$ en función de la posición. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

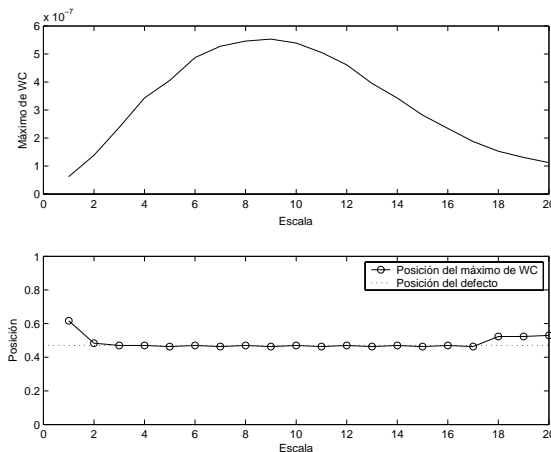


Figura 7.17. Arriba: Máximo de la función $WC_1(x,j)$ para diferentes valores de la escala; Abajo: Localización del máximo de la función $WC_1(x,j)$ para diferentes valores de la escala. Barra con un defecto $Id=0.1\%$ en la posición $x_d=0.4767$.

La Figura 7.16 muestra la función $WC_1(x,j)$ para las primeras 20 escalas, en función de la posición sobre la barra. Como ya hemos visto, la máxima amplitud del pico se consigue con la escala $j=9$. No obstante, para esta escala el pico no se diferencia demasiado de los lóbulos que lo rodean, lo que puede generar confusión a la hora de localizar el defecto, lo que se hace más evidente a medida que la escala aumenta. Así mismo, se observa que los picos son más estrechos al bajar la escala. No obstante a escala $j=1$ no se detecta el defecto. En la Figura 7.17 se representa, en función de la escala, el valor máximo de la función $WC_1(x,j)$ y la localización de dicho máximo, comparada con la localización real del defecto ($x_d=0.4767$). Vemos que la localización es bastante buena entre las escalas $j=2$ y $j=17$. Por otro lado, es obvio que cuanto mayor sea la altura del pico, mejor y más fácil será la detección del defecto, ya que éste se diferenciará mejor del ruido de fondo. Es decir, cuanto mayor sea el valor máximo de $WC_1(x,j)$, mejor será la detección. En definitiva, son tres los criterios que debemos tener en cuenta para considerar que la detección mejora: a) Localización del pico; b) Altura de pico (a mayor altura, mejor detección); c) Anchura de pico (a menor anchura, mejor detección). Según estos criterios y teniendo en cuenta las Figuras 7.16 y 7.17, podemos llegar a la conclusión de que quizás sea la escala $j=4$ la más apropiada para la detección del defecto en este caso. Esta conclusión puede parecer relativa, pues está hecha para un tipo de función base (Sym4), un tipo de defecto (densidad) y una intensidad de defecto ($I_d=0.1\%$). No obstante, el extenso análisis que hemos realizado, nos ha llevado a observar que este comportamiento en función de la escala es general, pudiendo concluir que: a) Al aumentar la escala, la anchura de pico aumenta, y por tanto, empeora la precisión en la localización; b) La localización empeora si la escala es muy baja o muy alta; c) La altura de pico va aumentando al subir la escala, hasta llegar a una escala en la que alcanza su máximo valor, a partir del cual va disminuyendo, y por tanto, empeorándose la detección del daño. En resumen, es conveniente usar escalas bajas, aunque no en exceso. Valores entre $j=3$ y $j=10$, podrían ser igualmente válidos en el proceso de detección de daño, con pequeñas diferencias entre unos y otros.

b.- Defecto tipo rigidez

Si el defecto se encuentra en la rigidez (véanse las Figuras 7.18, 7.19, 7.20 y 7.21), las conclusiones del estudio en función de la escala son prácticamente similares. No obstante, puede observarse que en este caso aparecen dos picos muy cercanos a la

posición del defecto, lo que hace que sea algo más imprecisa su localización. La presencia de estos dos picos parece ser algo inherente a este tipo de defecto.

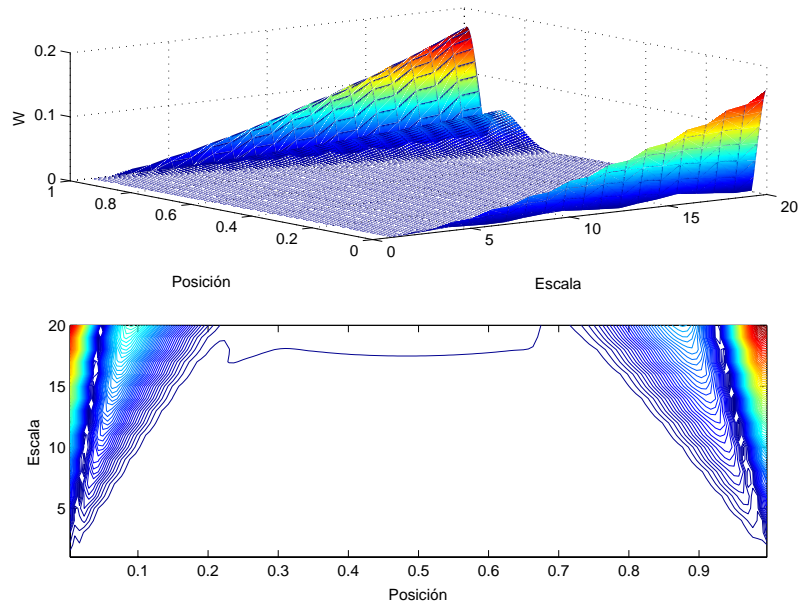


Figura 7.18. $W_1^d(x,j)$ para una barra con un defecto con $Ir=0.1\%$ en función de la escala y la posición. Arriba: Representación tridimensional; Abajo: Representación en líneas de contorno. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

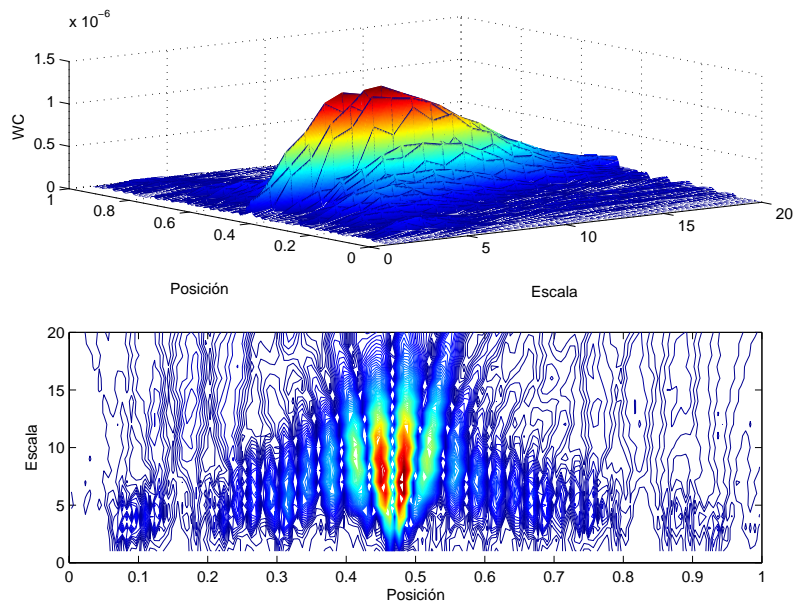


Figura 7.19. $WC_1(x,j)$ para una barra con un defecto con $Ir=0.1\%$ en función de la escala y la posición. Arriba: Representación tridimensional; Abajo: Representación en líneas de contorno. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

Puede observarse también que para escalas superiores a $j=10$ la localización del defecto es más difícil, dado que los dos picos aumentan considerablemente su anchura y se confunden con el resto. Igualmente, si la escala es muy baja, $j=1$, la detección no es buena. Para escalas entre $j=2$ y $j=10$, sin embargo, la detección y localización es aceptable, sin existir grandes diferencias entre ellas.

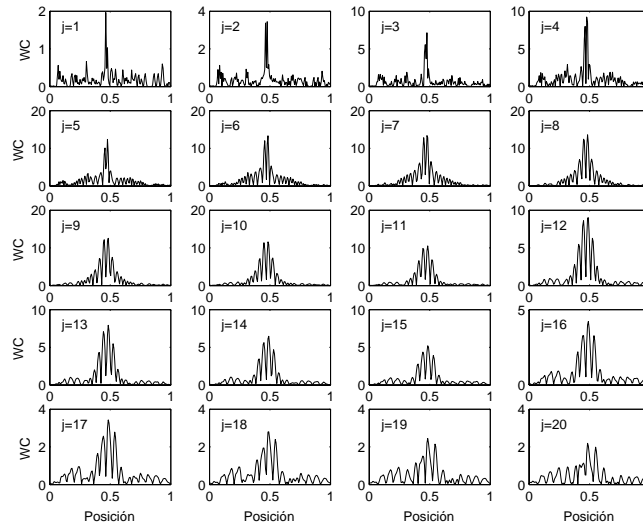


Figura 7.20. $WC_j(x, j=1:20)$ para una barra con un defecto $I_f=0.1\%$ en función de la posición. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

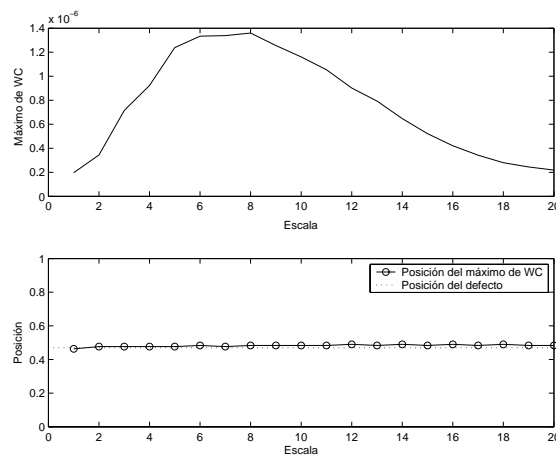


Figura 7.21. Arriba: Máximo de la función $WC_1(x, j)$ para diferentes valores de la escala; Abajo: Localización del máximo de la función $WC_1(x, j)$ para diferentes valores de la escala. Barra con un defecto $I_f=0.1\%$ en la posición $x_d=0.4767$.

7.3.1.3.- Influencia del orden del modo

En este apartado presentamos un estudio de cómo afecta el orden del modo propio con el que vibra la barra a la detección del daño, para el caso de modos de orden bajo (entre $n=1$ y $n=8$), es decir, para bajas frecuencias de vibración. Así mismo, indicamos una posible forma de cuantificar el defecto (Nivel 3) estudiando la relación entre la intensidad del defecto y el valor máximo de la función de detección $WC_n(x,j)$. Cabe señalar que en la bibliografía actual no existe ningún estudio sistemático de la influencia del orden del modo de vibración.

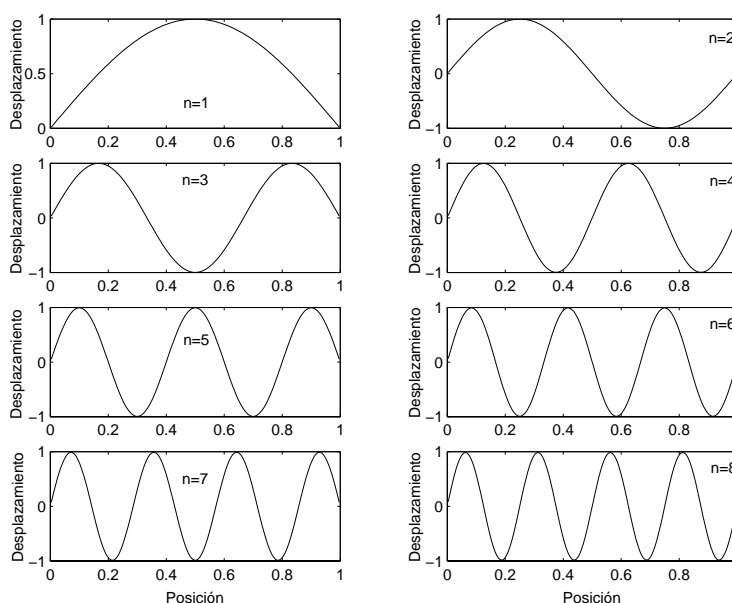


Figura 7.22. Ocho primeros modos de vibración longitudinal de una barra homogénea obtenidos con el MSR. Desplazamiento en el tiempo $t=2$.

Como hemos señalado anteriormente, estamos considerando como señal de análisis el desplazamiento de la barra en un instante determinado, lo que obviamente exige fijar a priori este tiempo concreto, que debe ser el mismo para todos los modos de vibración, con objeto de garantizar la objetividad de la comparación entre unos modos y otros. Sin embargo, la forma de las distintas ondas estacionarias que se producen varía con el modo que se excita, por lo que la elección de este tiempo no es algo trivial. Como lo más lógico es estudiar el desplazamiento cuando este alcanza su valor absoluto máximo, hemos considerado el desplazamiento a lo largo de la barra en el tiempo $t=2$, momento en que se produce el primer máximo del primer modo de vibración. Puesto que las frecuencias del resto de los modos de vibración son múltiplos de la correspondiente al primer modo, tenemos garantizado que en este tiempo nos

encontraremos un máximo en todos los modos. En definitiva, en todo este apartado, las señales $\xi_n^d(x)$ y $\xi_n^{sd}(x)$ a las cuales le realizaremos la TW corresponderán al desplazamiento en el tiempo $t=2$.

Por otro lado, y teniendo en cuenta lo expuesto en los apartados anteriores, trabajaremos con la función base Sym4 y con dos escalas, $j=2$ y $j=4$.

En la Figura 7.22 se muestran los ocho primeros modos de vibración de una barra sin defecto. En la Figura 7.23 se muestra la función $WC_n(x,2)$ desde $n=1$ hasta $n=8$ en el caso de una barra con un defecto en la densidad con $Id=0.01\%$, situado en la posición $x_d=0.4767$. Se puede ver claramente que los primeros modos no detectan la presencia del defecto, mientras que para los modos $n=5$ hasta $n=8$ es muy clara la presencia de un pico en la posición del defecto. Esto demuestra, en primera aproximación, que el orden del modo puede ser crucial a la hora de detectar o no el defecto.

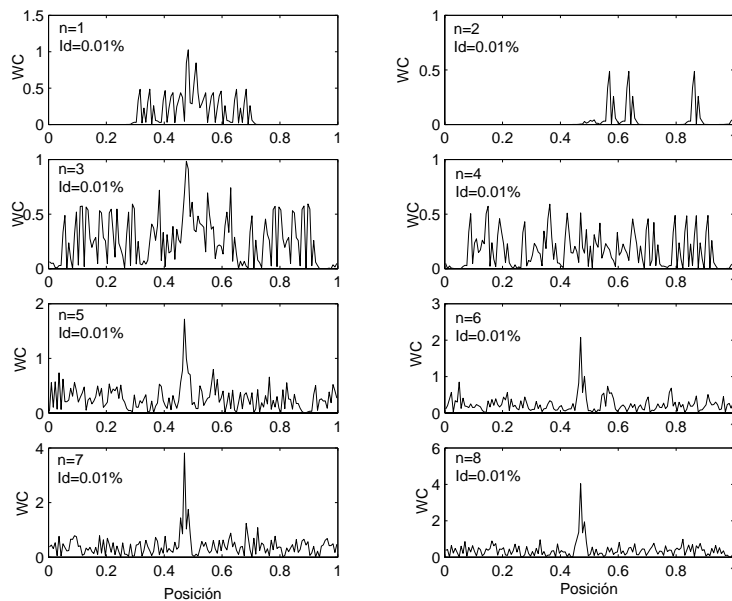


Figura 7.23. $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración de una barra con un defecto con $Id=0.01\%$. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

En el caso de que el defecto se encuentre en la rigidez, sucede prácticamente lo mismo. La Figura 7.24 muestra que la detección del defecto ($Ir=0.01\%$) no es igual con todos los modos de vibración, siendo imposible mediante el modo $n=1$ y muy clara con el resto de modos.

Por tanto, se hace necesario realizar un estudio sistemático sobre cómo afecta el orden del modo y las posibles diferencias que puede haber si el defecto está en la densidad o en la rigidez.

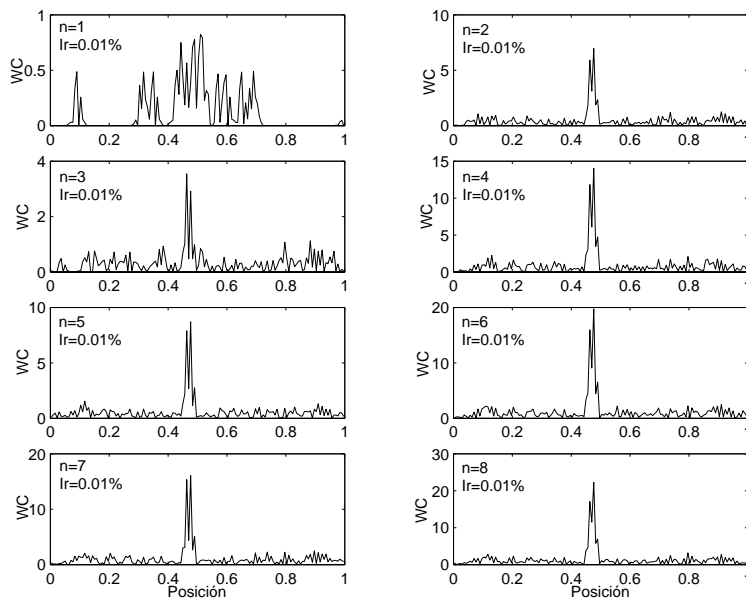


Figura 7.24. $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración de una barra con un defecto $Ir=0.01\%$.
Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

a.- Defecto tipo densidad

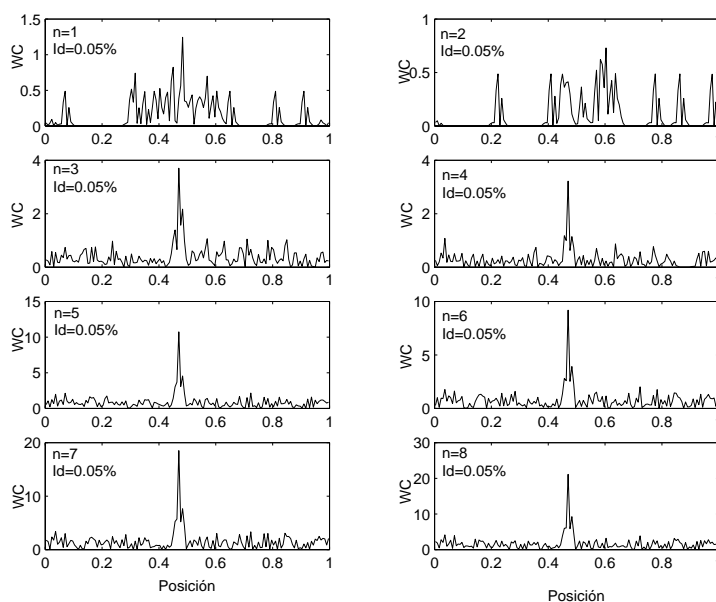


Figura 7.25. $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Id=0.05\%$.
Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

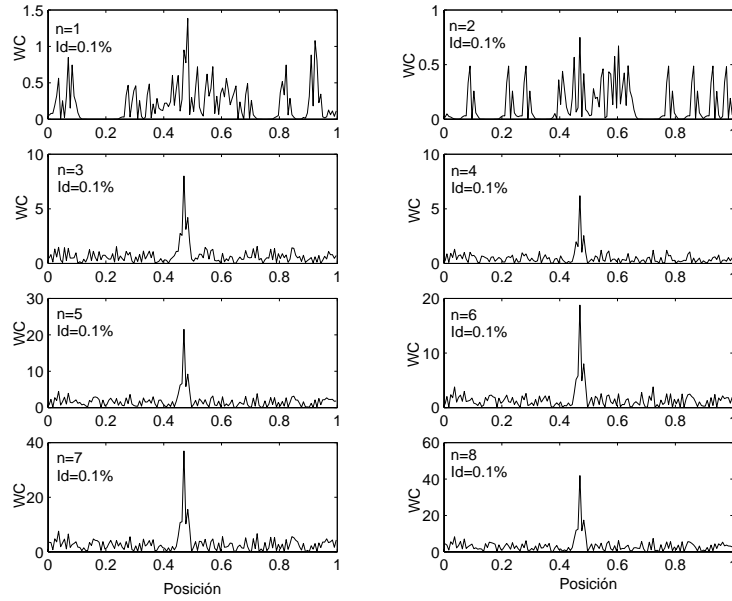


Figura 7.26. $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Id=0.1\%$.
Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

En las Figuras 7.23 y 7.25-7.29 se muestran $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ para los ocho modos de vibración y varias intensidades de defecto en la densidad. Para escala 2, en el caso del defecto de intensidad $Id=0.01\%$ (Figura 7.23) no aparecen picos claros en la posición del defecto hasta el modo 5. Nótese, por ejemplo, que con el modo 2 aparecen tres picos que podrían indicar de forma equivocada la presencia de tres defectos, ninguno de ellos en la posición del defecto verdadero, mientras que con el modo 4 no hay ningún pico destacado. Al aumentar la intensidad del defecto la detección mejora (Figuras 7.25 y 7.26), pudiéndose detectar claramente desde el modo 3.

Con escala 4 sucede algo parecido. No obstante, en este caso, cuando $Id=0.01\%$ (Figura 7.27) el defecto se detecta claramente con el modo 3. Al aumentar la intensidad del defecto vemos que la detección es más clara con el modo 1 que con el 2 (Figuras 7.28 y 7.29), lo que nos hace pensar que no hay una relación claramente directa entre el orden del modo y su capacidad para la detección del defecto.

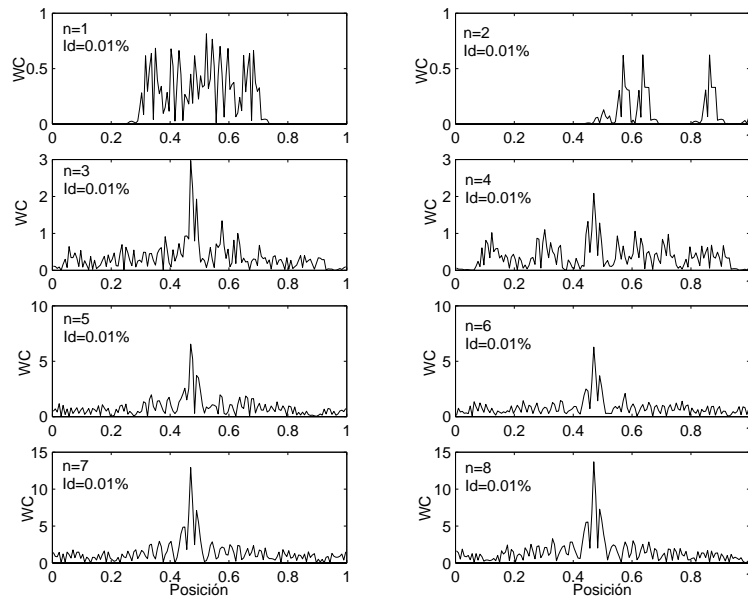


Figura 7.27. $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Id=0.01\%$.

Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

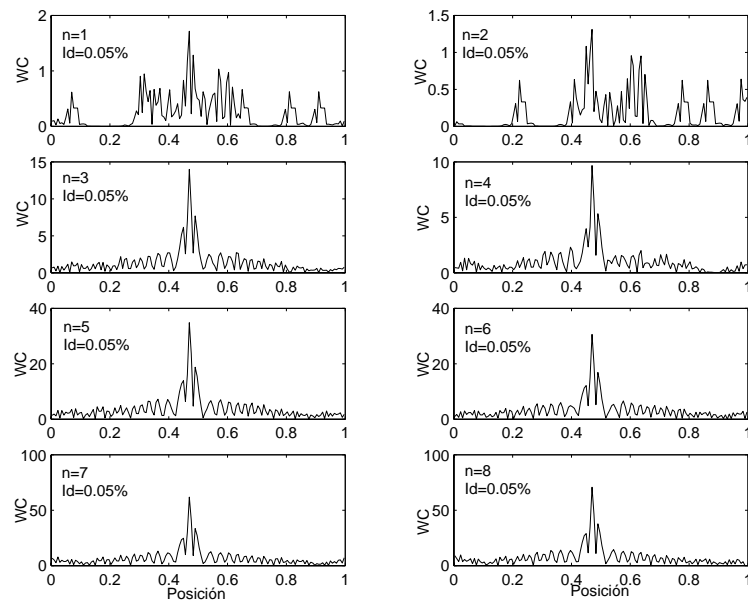


Figura 7.28. $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Id=0.05\%$.

Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

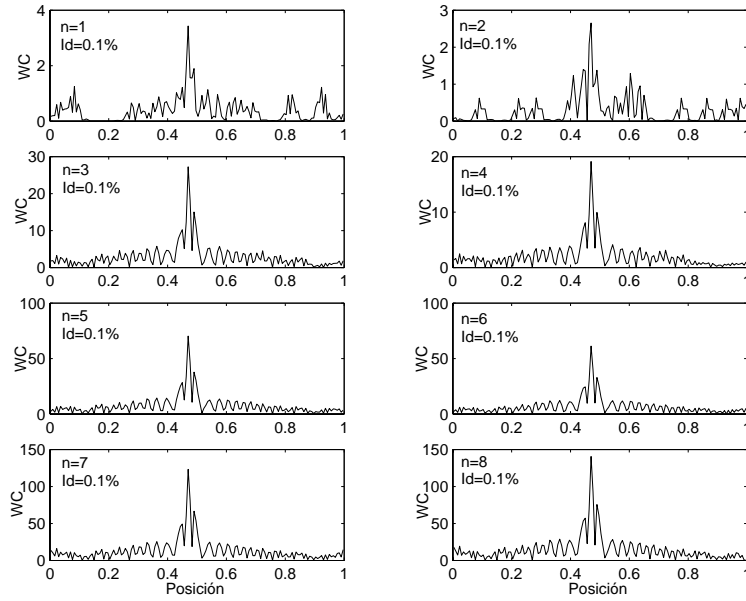


Figura 7.29. $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Id=0.1\%$.
Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

Otro aspecto destacable a la vista de estas figuras es que el valor del máximo de las funciones $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$, en general, aumenta con el orden del modo, y además, parece hacerlo por parejas. Es decir, para los modos 7 y 8 son similares entre sí y mayores que para los modos 5 y 6, y para estos a su vez mucho mayores que para los modos 3 y 4.

Además de la detección del defecto, otro aspecto importante es su cuantificación, esto es, conocer su intensidad a partir de la función WC . Las Figuras 7.23 y 7.25-7.29 nos permiten comprobar que al aumentar la intensidad de defecto, aumenta el valor del máximo de la función WC . Esta relación tan directa nos permitiría obtener la intensidad del defecto a partir de la amplitud del pico de WC . Para estudiar este importante aspecto, hemos considerado 8 intensidades de defecto, de forma que tengamos un rango suficiente de valores para poder sacar conclusiones fiables. Como, por otro lado, también interesa conocer las intensidades de defecto mínimas para poder detectarlo en función del orden del modo, se han elegido intensidades de defecto extremadamente bajas, de forma que para alguna el defecto sea indetectable. Las intensidades de defecto que hemos considerado son: 0.01%, 0.05%, 0.1%, 0.2%, 0.4%, 0.6%, 0.8% y 1%.

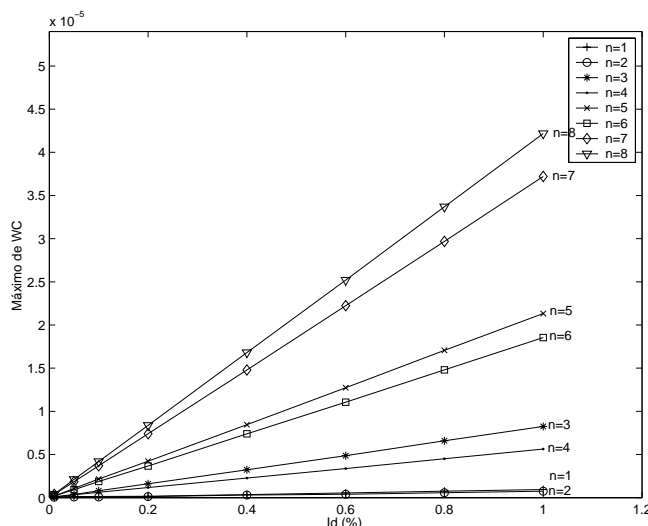


Figura 7.30. Máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad). Posición del defecto $x_d=0.4767$.

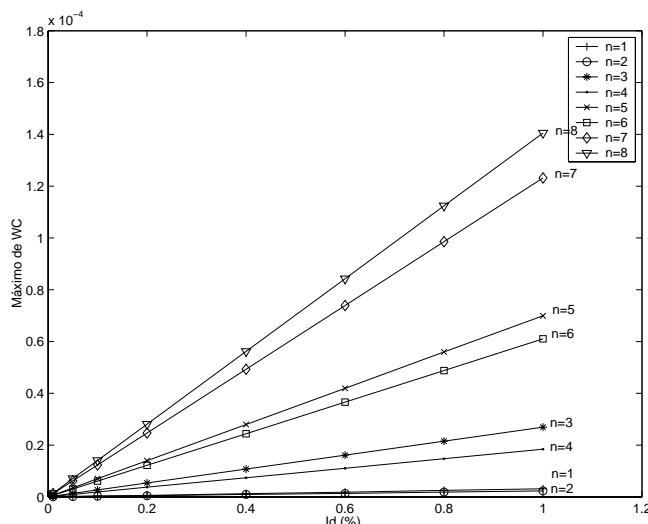


Figura 7.31. Máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad). Posición del defecto $x_d=0.4767$.

En las Figuras 7.30 y 7.31 se muestra cómo varía el valor del máximo de las funciones $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ con la intensidad del defecto. Como vemos, esta variación es lineal, es decir, el valor del máximo de estas funciones para cualquier escala es proporcional a la intensidad del defecto. Obviamente, esto se puede usar como una forma eficiente de cuantificar el defecto (Nivel 3). Otro aspecto importante de estas gráficas es que los valores del máximo de la función WC dependen mucho del orden del modo, es decir, la pendiente de la recta “Máximo de WC -Intensidad de Defecto” varía considerablemente con el orden del modo, siendo esta variación algo irregular.

Debemos tener en cuenta, tal y como dijimos anteriormente, que cuanto mayor sea el valor de este máximo, mejor será la detección del defecto.

En general, podemos deducir de las Figuras 7.30 y 7.31 que a medida que aumenta el orden del modo, mayor es el valor del máximo de la función WC , siendo, por tanto, mejor la detección del defecto. Este es un resultado que en general se conoce bien en la literatura, donde se asume que los modos de orden más alto son más sensibles a los cambios introducidos por el defecto, que los modos más bajos. Sin embargo, por ejemplo, a la vista de las Figuras 7.30 y 7.31, entre los modos 3 y 4 este resultado se altera. Lo mismo ocurre entre los modos 5 y 6, y entre los modos 1 y 2. En concreto, si seguimos el criterio de que a mayor valor del máximo de WC , mejor es la detección, los modos se clasificarían de mejor a peor para la detección del defecto de la siguiente forma: 8°, 7°, 5°, 6°, 3°, 4°, 1° y 2°. Esto nos permite deducir que, además del orden del modo, debe existir otro criterio que influye claramente en la distinta capacidad de detección de los diferentes modos de vibración. Si observamos los modos de vibración de desplazamiento (Figura 7.22) podemos ver que en la posición del defecto, $x_d=0.4767$, el valor del desplazamiento, $\xi_n^{sd}(x_d)$, es diferente para cada modo de vibración. Puede observarse, que para modos en los que el defecto se localiza cerca de un nodo (el desplazamiento presenta valores bajos), el valor del máximo de $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ será también bajo, y por tanto, la detección del defecto será peor. Por el contrario, para modos para los cuales el defecto se localice cerca de un vientre del desplazamiento (el desplazamiento presenta valores altos), el valor del máximo de dichas funciones será también alto, y la detección será mejor. En definitiva, si el defecto está cerca de un nodo del desplazamiento, este será más difícil de detectar. Por el contrario, si se encuentra cerca de un vientre, será más fácil detectarlo. En la Tabla 7.1 se muestra, en valor absoluto, el valor del desplazamiento $\xi_n^{sd}(x_d=0.4767)$, para los 8 primeros modos de vibración. Por ejemplo, para el modo 1 el desplazamiento es mucho mayor que para el modo 2, $\xi_1^{sd}(x_d)=0.996$ y $\xi_2^{sd}(x_d)=0.187$, lo que justifica que el modo 1 sea mejor que el modo 2 para la detección de este defecto, aún cuando tiene un orden menor. Nótese que el defecto se encuentra muy cerca del nodo del segundo modo de vibración. Lo mismo ocurre entre los modos tres y cuatro, y entre los modos quinto y sexto. Entre los modos séptimo y octavo, la diferencia del desplazamiento en la posición del defecto es muy pequeña. Por ello, la diferencia entre estos modos en cuanto a su capacidad de

detección de este defecto no es muy grande, predominando en este caso el criterio de que a mayor orden, mejor será la detección.

Orden del modo	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \xi_n^{sd}(x_d) $	0.996	0.187	0.960	0.368	0.891	0.536	0.790	0.685

Tabla 7.1. Desplazamiento de cada modo de vibración en la posición del defecto ($x_d=0.4767$).

En definitiva, existen dos factores que actúan al mismo tiempo para determinar la calidad en la detección del defecto que proporciona un determinado modo de vibración:

-Su orden: A mayor orden del modo, mejor es la detección.

-La cercanía del defecto a un nodo o a un vientre del modo de desplazamiento: A mayor desplazamiento de la barra en la posición del defecto, mejor será su detección. Es decir, cuanto más cercano esté el defecto a un vientre de vibración de un determinado modo, más adecuado será dicho modo para ser usado en la detección del defecto.

Como muestra de la validez de estos argumentos, en las Figuras 7.32 y 7.33 se presenta el mismo análisis pero para una barra con un defecto situado en la posición $x_d=0.3$. En este caso, según el valor del máximo de la función WC , la clasificación de los modos de mayor a menor capacidad de detección es la siguiente: 8°, 5°, 6°, 7°, 4°, 2°, 3°, 1°, tanto en escala 2 como en escala 4. Observando la Tabla 7.2, se vuelve a comprobar que en la detección del defecto influye tanto el orden del modo como el valor del desplazamiento que alcanza cada modo de vibración justo en la posición del defecto. En este caso, por ejemplo, para el modo 5 el defecto se encuentra en un vientre, lo que justifica que casi sea el mejor modo para la detección del defecto, antes incluso que los modos 6 y 7. Obviamente el mejor para detectar este defecto es el 8, ya que además de ser el de mayor orden, presenta un vientre muy cercano al defecto.

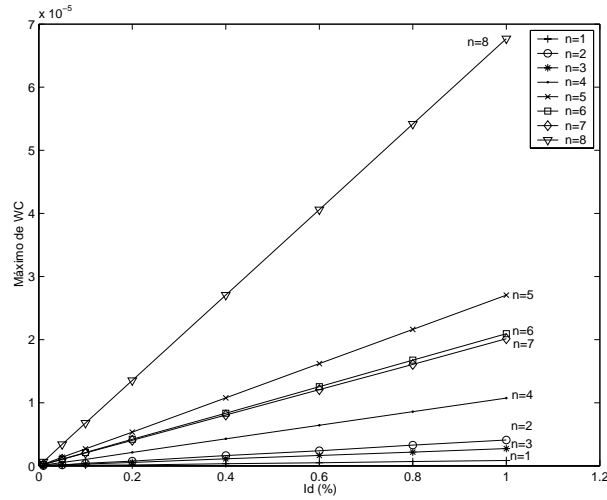


Figura 7.32. Máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad). Posición del defecto $x_d=0.3$.

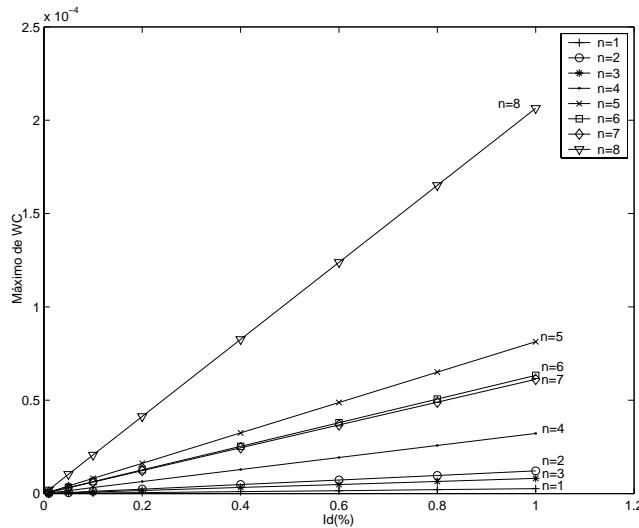


Figura 7.33. Máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad). Posición del defecto $x_d=0.3$.

Orden del modo	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \xi_n^{sd}(x_d) $	0.8090	0.951	0.309	0.588	1.000	0.588	0.309	0.951

Tabla 7.2. Desplazamiento de cada modo de vibración en la posición del defecto ($x_d=0.3$).

Otro aspecto importante para conocer la bondad de un modo de vibración es la localización del defecto detectado. En las Figuras 7.34 y 7.35 se muestra la posición del máximo de las funciones $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ para las distintas intensidades y modos

de vibración. Con estas figuras podemos conocer hasta qué intensidad de defecto se puede localizar con cada modo. Al trabajar con la escala 2 (Figura 7.34) vemos que hay desviación en la localización con los modos 2 y 4, mientras que con escala 4 (Figura 7.35) las desviaciones se producen con los modos 1 y 2.

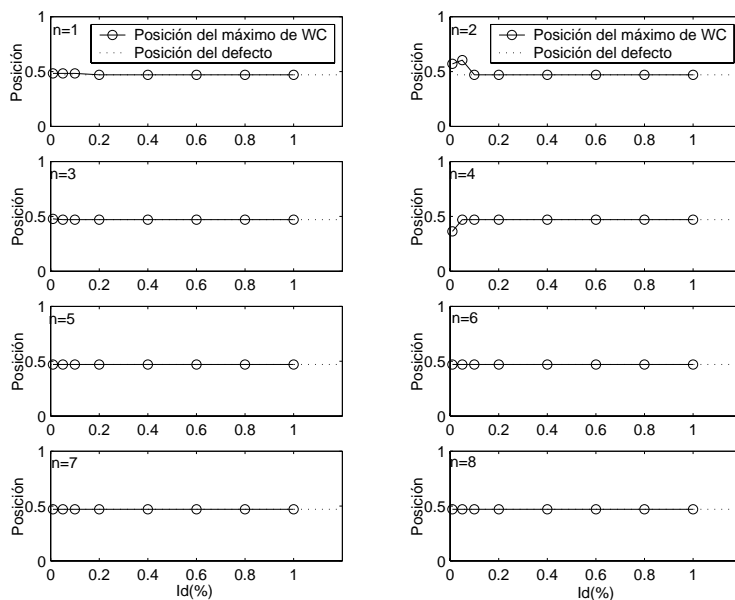


Figura 7.34. Posición del máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad) comparada con la posición del defecto, $x_d=0.4767$.

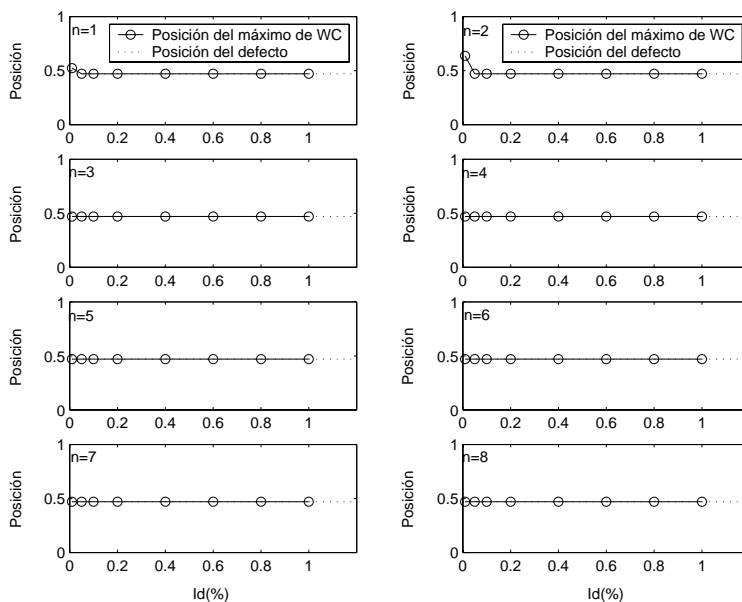


Figura 7.35. Posición del máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (densidad) comparada con la posición del defecto, $x_d=0.4767$.

b.- Defecto tipo rigidez

Para el caso de un defecto en la rigidez hemos realizado un análisis totalmente análogo. En las Figuras 7.24, 7.36-7.38 se muestra las funciones $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ para los 8 modos de vibración y barras con intensidades de defecto $Ir=0.01\%$ e $Ir=0.05\%$ con escalas 2 y 4 y con el defecto situado en $x_d=0.4767$. Se puede ver que, en general, la detección es mejor que cuando el defecto afecta a la densidad. Incluso en el caso más extremo de intensidad $Ir=0.01\%$, vemos que se detecta el defecto con todos los modos salvo con el primero (con escala 4 se puede incluso intuir su presencia en el modo 1). Un aspecto importante a resaltar es la aparición de dos picos muy juntos entre sí y cercanos a la posición del defecto, lo cual puede crear confusión a la hora de localizar el defecto. No obstante, al estar tan juntos el error cometido es mínimo. Por otro lado, al contrario que con el defecto en la densidad, la detección con el modo 2 es mejor que con el 1.

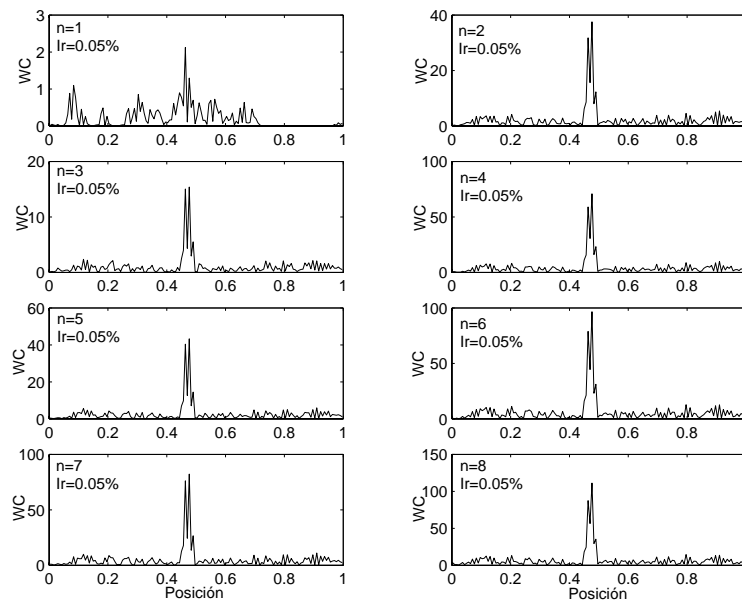


Figura 7.36. $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Ir=0.05\%$.
Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

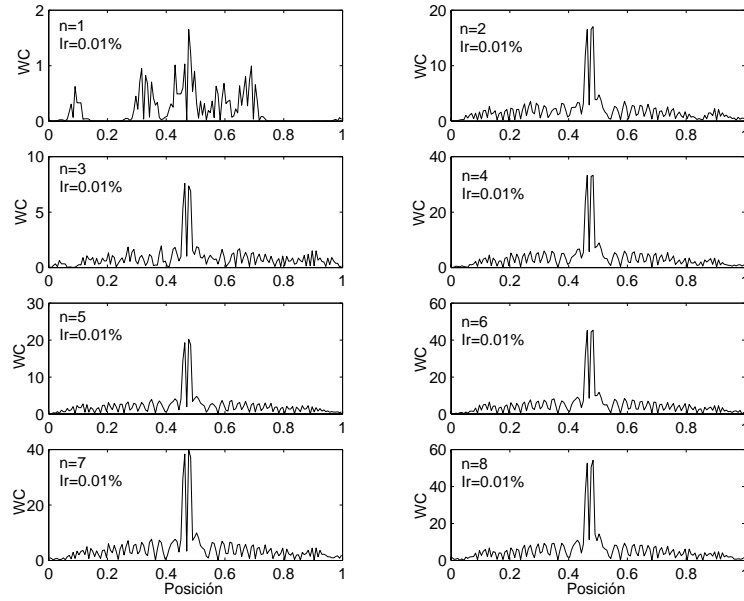


Figura 7.37. $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto $Ir=0.01\%$.

Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

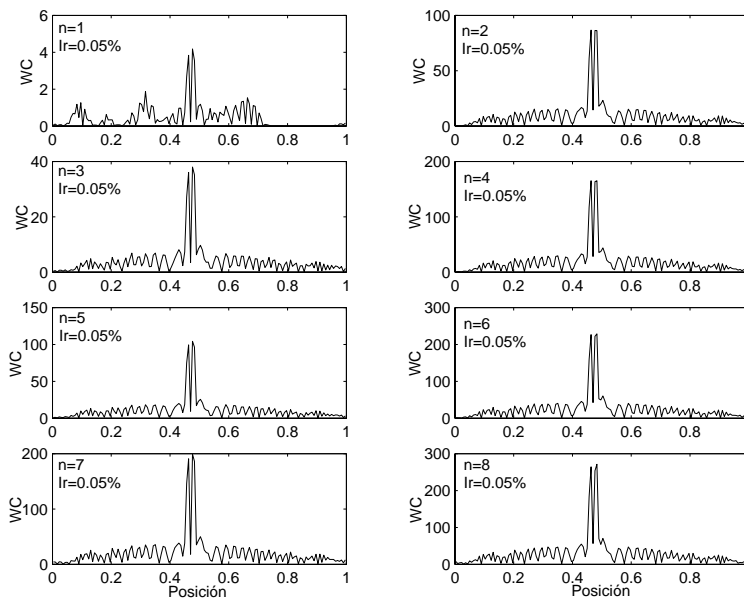


Figura 7.38. $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración para una barra con un defecto

$Ir=0.05\%$ en función de la posición. Posición del defecto: $x_d=0.4767$.

Al estudiar la variación del máximo de las funciones $WC_n(x,2)$ y $WC_n(x,4)$ con la intensidad del defecto (Figuras 7.39 y 7.40) vemos que sigue apareciendo una clara relación de linealidad y que la capacidad de detección de los distintos modos no aumenta proporcionalmente con el orden del modo. En este caso, la ordenación de los modos en cuanto a su capacidad de detección (a mayor valor del máximo de la función WC , mayor capacidad de detección) es, de mayor a menor, la siguiente: 8º, 6º, 7º, 4º, 5º,

2°, 3° y 1°. Como vemos esta ordenación de los modos propios difiere considerablemente de la que habíamos visto cuando el defecto estaba en la densidad. Esto parece indicar que, aunque de nuevo la capacidad de detección del defecto aumenta con el orden del modo, hay otro factor que interviene en el proceso. Cuando teníamos el defecto en la densidad este otro factor era su cercanía a un nodo o a un vientre del modo de vibración del desplazamiento. Evidentemente, aquí no ocurre lo mismo, ya que la mayoría de los modos están intercambiados, siendo ahora mejor el sexto que el séptimo y el quinto, el cuarto mejor que el quinto y el tercero, y el segundo mejor que el tercero y el primero, cuando antes ocurría todo lo contrario.

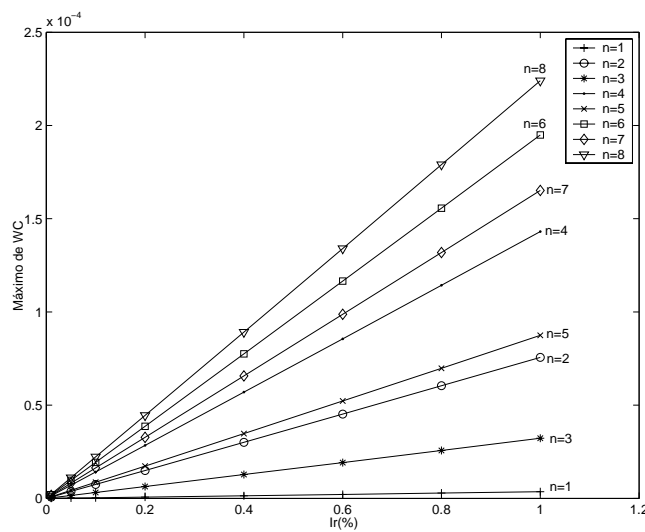


Figura 7.39. Máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez). Posición del defecto $x_d=0.4767$.

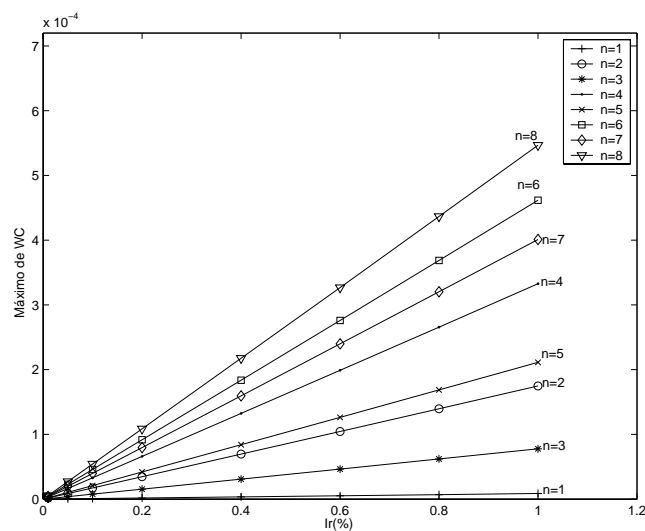


Figura 7.40. Máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez). Posición del defecto $x_d=0.4767$.

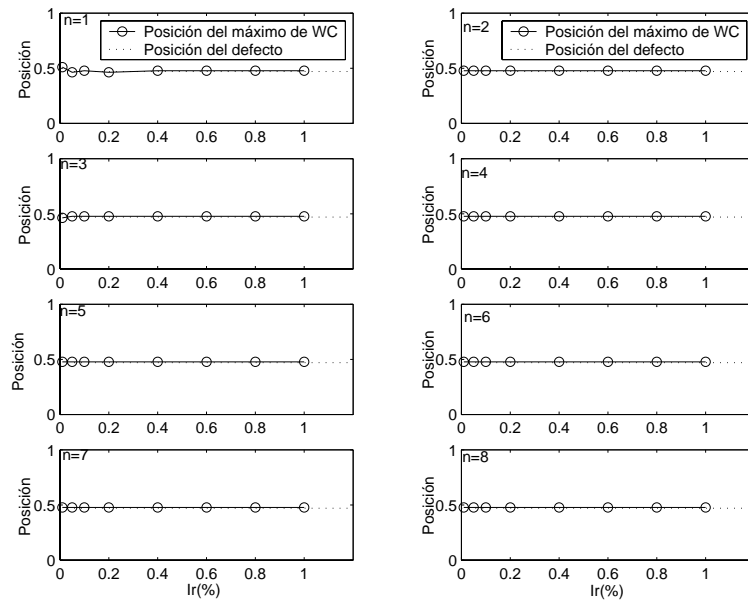


Figura 7.41. Posición del máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez) comparada con la posición del defecto, $x_d=0.4767$.

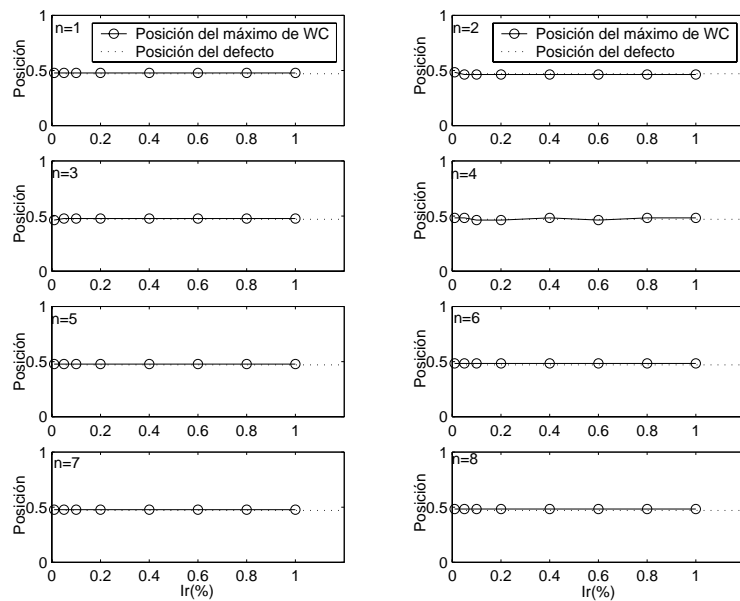


Figura 7.42. Posición del máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez) comparada con la posición del defecto, $x_d=0.4767$.

Por tanto, la causa que tiende en este caso a ordenar los modos en lo que a su capacidad de detección del defecto se refiere, es contrapuesta a la que teníamos cuando el defecto estaba en la densidad. Un análisis minucioso de los resultados nos ha permitido observar que en este caso no hay que tener en cuenta los modos del desplazamiento sino los modos de la fuerza. Según lo expuesto en el Capítulo 3, los modos de la fuerza se obtienen derivando espacialmente los modos del desplazamiento,

de forma que los nodos y vientres en el desplazamiento pasan a ser vientres y nodos en la fuerza, respectivamente. Esto hace que los modos que en el caso de la densidad eran buenos para la detección del defecto ahora no lo sean y viceversa. En la Tabla 7.3 se muestra, en valor absoluto, el valor de cada modo de vibración de la fuerza en la posición del defecto, $\sigma_n^{sd}(x_d=0.4767)$. Si observamos esta tabla vemos que efectivamente el sexto modo debe ser mejor que el séptimo, ya que la fuerza en la posición del defecto es mayor en el sexto que en el séptimo modo. De la misma forma, se justifica por qué el cuarto modo es mejor que el quinto, y por qué el segundo es mejor que el tercero y el primero. En resumen, cuando el defecto se encuentra en la rigidez, los dos factores que actúan conjuntamente para determinar la bondad de un modo para detectar un defecto son:

-Su orden: A mayor orden del modo, mejor detección.

-Proximidad del defecto a un nodo o un vientre de la fuerza: A mayor cercanía del defecto a un vientre de la fuerza (nodo del desplazamiento), mejor será su detección. A mayor cercanía del defecto a un nodo de la fuerza (vientre del desplazamiento), peor será su detección.

Orden del modo	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \sigma_n^{sd}(x_d) $	0.094	0.982	0.279	0.930	0.454	0.844	0.613	0.729

Tabla 7.3. Fuerza de cada modo de vibración en la posición del defecto ($x_d=0.4767$).

Para confirmar esta conclusión hemos repetido el estudio para una barra con un defecto situado en la posición $x_d=0.3$ (véanse las Figuras 7.43 y 7.44). La Tabla 7.4 muestra el valor de la fuerza en cada modo de vibración justo en la posición del defecto. Vemos que ahora los modos se ordenan de la siguiente forma, de mejor a peor capacidad de detección: 7°, 6°, 4°, 3°, 8°, 2°, 1° y 5°. Nótese que en esta ocasión el octavo modo no es el mejor, sino que se encuentra en mitad de la lista, y el quinto modo es el peor de todos, a pesar de ser un modo relativamente alto. Esto se debe a que para el modo 8 el defecto está muy cercano a un nodo de la fuerza, y para el modo 5 el defecto está muy próximo al nodo de la fuerza. Los modos 7 y 6, dado su alto orden y el alto valor que tiene la fuerza en el defecto, son los mejores a la hora de la detección.

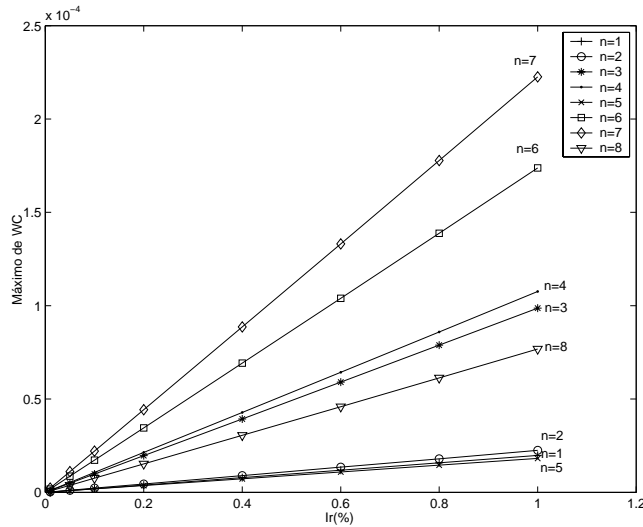


Figura 7.43. Máximo de la función $WC_n(x,2)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez). Posición del defecto $x_d=0.3$.

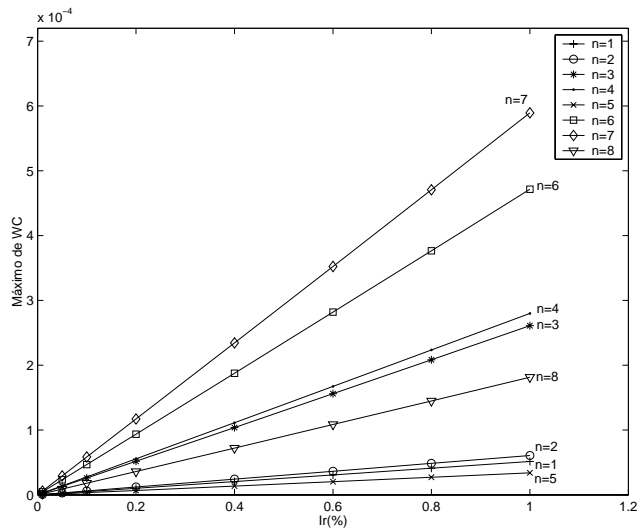


Figura 7.44. Máximo de la función $WC_n(x,4)$ para los 8 primeros modos de vibración en función de la intensidad del defecto (rigidez). Posición del defecto $x_d=0.3$.

Orden del modo	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \sigma_n^{sd}(x_d) $	0.588	0.309	0.951	0.809	$1.84 \cdot 10^{-16}$	0.809	0.951	0.309

Tabla 7.4. Fuerza de cada modo de vibración en la posición del defecto ($x_d=0.3$).

Esta diferencia de comportamiento entre los dos tipos de defectos puede aprovecharse para saber de qué tipo es un defecto desconocido, de forma que además de cuantificarlo y localizarlo podamos caracterizarlo. No obstante, puede parecer un poco extraño que con un defecto en la rigidez tengamos que tener en cuenta los modos de vibración de la fuerza, cuando con lo que trabajamos es con los valores del

desplazamiento, los cuales conforman nuestra señal a la que le hacemos la TW. Sin embargo, debemos tener en cuenta que un cambio en el módulo de Young afecta principalmente a los valores de la fuerza en esa zona. Este cambio se traslada luego al desplazamiento, aunque su efecto principal se produce sobre la fuerza. Para demostrarlo analíticamente, partimos de la distribución del modulo de Young en la barra con defecto:

$$E(x) = E + E_d \delta(x - x_d) \quad (7.9)$$

Dado que la función delta de Dirac no es derivable, la podemos aproximar por una función gaussiana, esto es:

$$\delta(x - x_d) \cong \exp\left(-\frac{(x - x_d)^2}{a^2}\right) / (a \pi^{1/2}) \quad a \rightarrow 0 \quad (7.10)$$

Como ya vimos en el Capítulo 3, la fuerza y la ecuación del movimiento vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma &= -E(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-E(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.12)$$

$$-E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - E_d \frac{\partial \xi}{\partial x} e^{-(x-x_d)^2/a^2} 2(x - x_d) / (a^3 \pi^{1/2}) + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Como vemos el segundo término de esta última ecuación diferencial es el único debido a la presencia del defecto. Este término es proporcional a la derivada espacial del desplazamiento, es decir, a la fuerza. Por tanto, cuanto mayor sea la fuerza, mayor será este término, y consecuentemente, mayor será la influencia del defecto en la solución de la ecuación de ondas. Obviamente, esto ocurrirá cuando el defecto esté cercano a un vientre de la fuerza, es decir, cercano a un nodo del desplazamiento.

7.3.1.4.- Defectos cercanos a los extremos

La aparición de la distorsión de borde complica la detección de defectos cerca de un extremo usando W como función de detección. Aunque hemos visto que al trabajar con WC como función de detección desaparece la distorsión de borde, creemos que es importante hacer un breve estudio de la calidad de la detección cuando el defecto está próximo a un extremo. Para ello hemos considerado una barra con dos defectos de $Id=0.1\%$ en la densidad, uno situado en la posición $x_{d1}=0.0033$ (lo más cerca al extremo que permite nuestro modelo en red) y otro en la posición $x_{d2}=0.03$.

Las Figuras 7.45-7.48 representan las funciones $WC_1(x,2)$ y $WC_1(x,4)$ para estas dos posiciones de defecto. Se puede observar que aparece cierta distorsión de borde, aunque de forma mucho más localizada en los extremos. Sin embargo, esto no impide la detección del defecto ni siquiera cuando se encuentra en $x_{d1}=0.0033$, pues se observa un pico bien definido justo donde se sitúa el defecto. Sin embargo, se observa también que al trabajar con la escala 4 la detección es algo peor que con la escala 2. Por tanto, la detección de defectos cerca de los extremos se ve favorecida al trabajar con escalas algo más bajas.

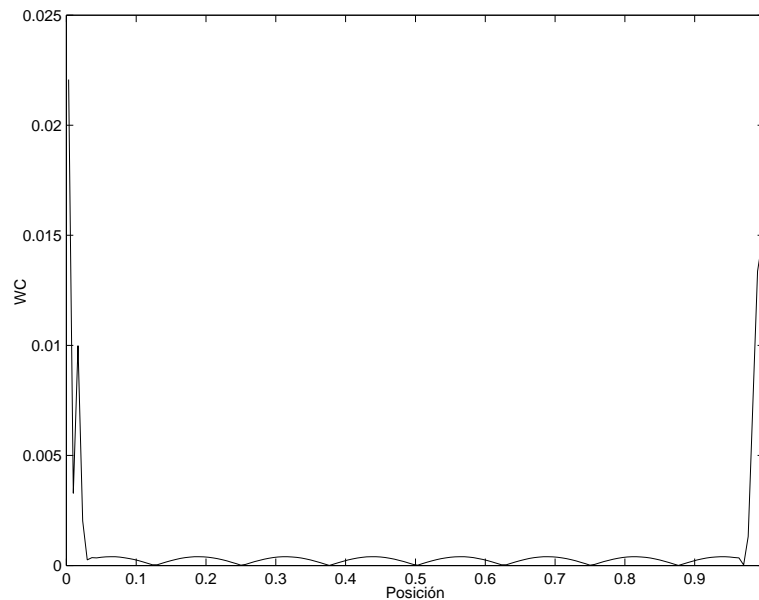


Figura 7.45. $WC_1(x,2)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Posición del defecto: $x_{d1}=0.0033$.

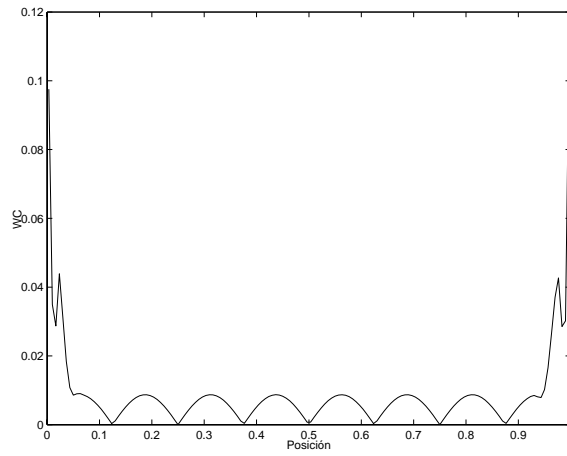


Figura 7.46. $WC_1(x,2)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Posición del defecto: $x_{d2}=0.03$.

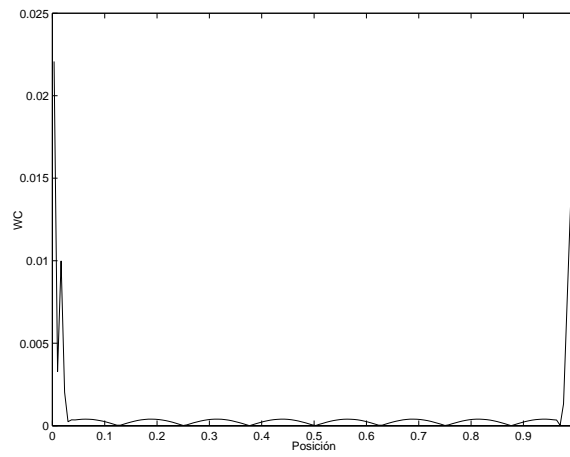


Figura 7.47. $WC_1(x,4)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Posición del defecto: $x_{d1}=0.0003$.

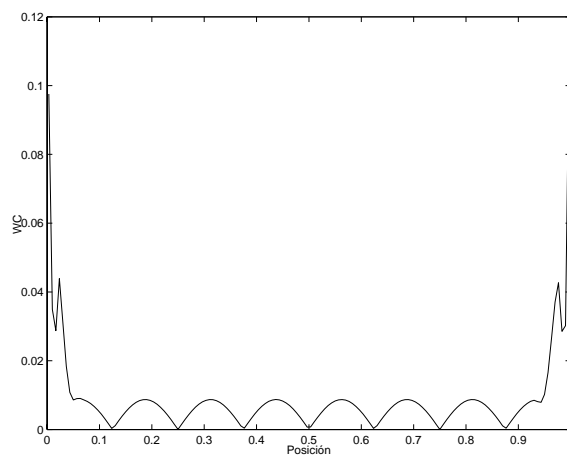


Figura 7.48. $WC_1(x,4)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Posición del defecto: $x_{d2}=0.03$.

7.3.1.5.- Defectos próximos entre sí

Otro aspecto importante a considerar es la capacidad de la técnica para detectar dos defectos muy cercanos entre sí, es decir, su capacidad de discriminación. En las Figuras 7.49 y 7.50 se muestran las funciones $WC_1(x,2)$ y $WC_1(x,4)$ para dos barras con dos defectos de $Id=0.1\%$, situados a distintas distancias entre sí: Con un defecto en la posición $x_{d1}=0.477$ y otro situado tanto a la izquierda como a la derecha del anterior en las posiciones $x_{d2}=0.41, 0.45, 0.463, 0.49, 0.503$ y 0.543 .

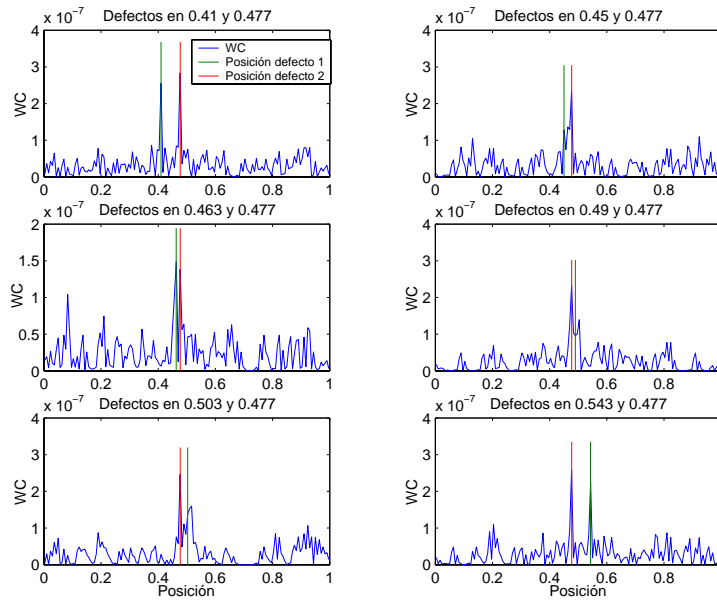


Figura 7.49. $WC_1(x,2)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Dos defectos próximos entre sí.

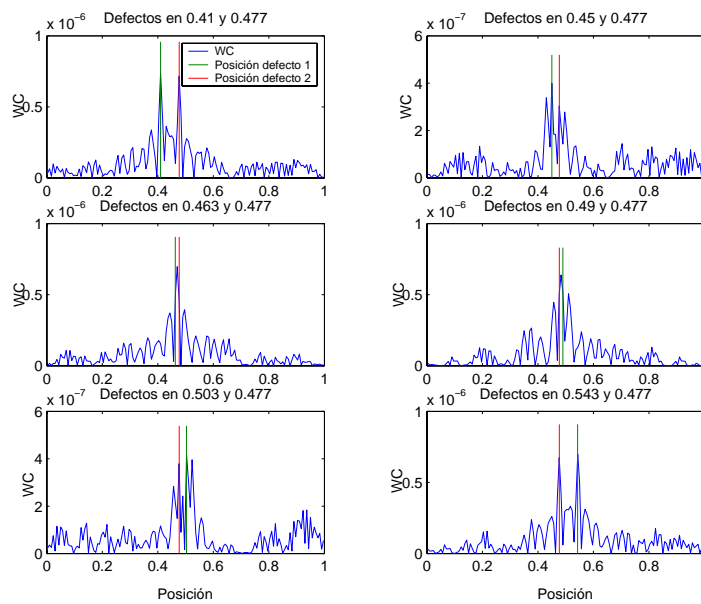


Figura 7.50. $WC_1(x,4)$ para una barra con un defecto $Id=0.1\%$. Dos defectos próximos entre sí.

Con el segundo defecto situado en $x_{d2}=0.41$, podemos observar que la detección de los dos defectos es perfecta, tanto en escala 2 como en escala 4. Destacan claramente dos picos en las posiciones de los defectos, los cuales además son de casi la misma amplitud, lo cual es lógico ya que son de la misma intensidad. Por lo tanto, con una separación de 0.067 es posible la discriminación entre los dos defectos.

Con el segundo defecto situado en $x_{d2}=0.45$, vemos que la situación empeora ligeramente. En escala 2 aparece un pico muy prominente en $x=0.477$, mientras que en $x=0.45$ aparece un pico más pequeño que, aunque localiza correctamente este segundo defecto, es más difícil de ser considerado como un indicativo de la presencia de un defecto. Con escala 4 la situación es algo más confusa, ya que aparecen varios picos en la zona de los defectos. Parece que en este caso cada defecto genera dos picos en la función WC , estando situado el de mayor amplitud justo en la posición del defecto.

Cuando el segundo defecto se sitúa en $x_{d2}=0.463$ (la distancia mínima a $x_{d1}=0.477$ que permite nuestro modelo en red), vemos que en escala 2 la detección es perfecta, apareciendo picos claros y destacados en $x=0.463$ y en $x=0.477$. Es sorprendente que la detección sea mejor con esta separación entre defectos que en el caso anterior en el que estaban más separados. Con escala 4, sin embargo, aparece un único pico justo entre los dos defectos, no pudiéndose discriminar entre ellos.

Al situar el segundo defecto a la derecha del primero vemos que la situación no es la misma que cuando se encontraba situado a la izquierda (no existe simetría). Con el segundo defecto situado en $x_{d2}=0.49$, con escala 2 solo se detecta correctamente el primer defecto. Aparece un segundo pico que, aunque puede interpretarse como un defecto, se encuentra en una posición distinta a la del defecto real. En cambio, con escala 4 tenemos exactamente la misma situación que en el caso anterior, es decir, un pico situado entre los dos defectos, no pudiéndose discriminar entre ellos.

Al alejar un poco más el segundo defecto ($x_{d2}=0.503$), con escala 2 éste sigue sin localizarse correctamente, apareciendo un pico en una posición algo más alejada del primer defecto que la posición real. No obstante, el primer defecto se localiza perfectamente en $x=0.477$. Con escala 4 aparecen varios picos, dos de ellos situados justo en los defectos. De nuevo podemos decir que parece que cada defecto genera dos picos y que el más alto de la pareja marca la ubicación real del defecto. No obstante, en

la práctica, cuando la posición del defecto es desconocida, esto crearía indudablemente confusión sobre el número y localización de los defectos.

Al tener el segundo defecto situado en $x_{d2}=0.543$, a una distancia algo más grande del primero, la detección y localización de los dos defectos es perfecta para las escalas 2 y 4.

De todo esto podemos extraer como conclusión importante que a partir de una separación de defectos de aproximadamente 0.04-0.05, la detección, localización y discriminación entre los dos defectos es casi perfecta. A distancias inferiores la detección, aunque es posible, presenta ciertos problemas y es necesario trabajar con cuidado en la interpretación de los resultados. Debemos destacar también, que para estas distancias tan pequeñas la escala 2 discrimina mejor entre los defectos que la 4, lo cual es lógico dado el sentido físico-matemático de la escala.

7.3.1.6.- Más de dos defectos

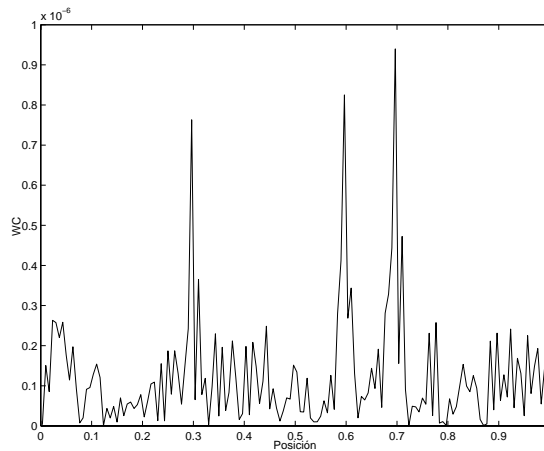


Figura 7.51. $WC_1(x,2)$ para una barra con tres defectos $Id=0.1\%$. Posición de los defectos: $x_{d1}=0.3$, $x_{d2}=0.6$ y $x_{d3}=0.7$.

Tras el detallado estudio que hemos presentado para una barra con dos defectos, presentamos, a modo de ejemplo, cómo la técnica es capaz de trabajar bien cuando sobre la barra existen más de dos defectos. En concreto, presentamos los resultados obtenidos para una barra con tres defectos de igual intensidad, $Id=0.1\%$, situados en las posiciones 0.3, 0.6 y 0.7. En las Figuras 7.51 y 7.52 se representan las funciones de detección $WC_1(x,2)$ y $WC_1(x,4)$. En ellas podemos ver que los tres defectos se detectan sin ningún problema ni interferencia entre ellos. Lo único destacable es la pequeña

diferencia de amplitud entre los tres picos (nótese que los tres defectos se han considerado de la misma intensidad) y el hecho de que con escala 4 los picos secundarios que rodean a los principales sean más altos y puedan erróneamente hacer creer en la presencia de otros defectos inexistentes.

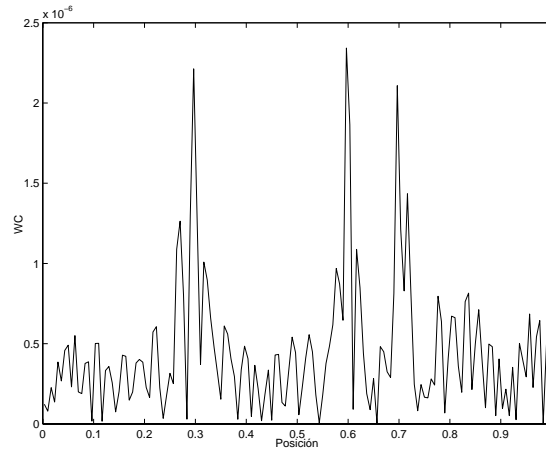


Figura 7.52. $WC_1(x,4)$ para una barra con tres defectos $Id=0.1\%$. Posición de los defectos: $x_{d1}=0.3$, $x_{d2}=0.6$ y $x_{d3}=0.7$.

7.3.2.- Con señales temporales

Hasta ahora hemos trabajado con señales espaciales, es decir, con la distribución de una magnitud física en el espacio para un instante de tiempo determinado. Como hemos visto, esto nos permite detectar, localizar y cuantificar el defecto de una manera precisa y sencilla. Sin embargo, tiene el inconveniente de que en la práctica es necesario medir dicha magnitud física en numerosos puntos de la barra en el mismo instante de tiempo. Esto requiere el uso de muchos sensores, o, si es posible repetir el experimento muchas veces, desplazar el sensor de un punto a otro de la barra.

La alternativa consiste en trabajar con señales temporales, es decir, con la evolución en el tiempo de una magnitud física característica de la vibración, como por ejemplo, el desplazamiento longitudinal en un punto de la barra. En este caso se requiere de uno o varios sensores, por lo que experimentalmente resulta más sencillo. La contrapartida está en que los resultados son más difíciles de analizar e interpretar. En la bibliografía se pueden encontrar varias técnicas para detectar un defecto a partir de señales temporales, como por ejemplo, detectar cambios en la frecuencia de vibración de la barra con respecto a otra sin daño, ajustar un modelo numérico a los resultados

obtenidos, o detectar reflexiones producidas por el defecto al aplicar un pulso. La TW se puede aplicar a veces en este último caso para detectar los tiempos de llegada de esas reflexiones en medios dispersivos, tal y como se realiza en [7.13].

En esta sección investigamos la posibilidad de utilizar la TW para detectar defectos mediante una estrategia diferente. El sistema físico que analizaremos es el mismo que en el resto del capítulo, una barra con un defecto en la densidad o en la rigidez. Este sistema no es, por tanto, un medio dispersivo, por lo que con defectos relativamente grandes se puede detectar la reflexión de las fuerzas o pulsos aplicados de una manera sencilla, y a partir de ella localizar el defecto. Sin embargo, para defectos pequeños, del orden de los que hemos usado hasta ahora a lo largo del capítulo, esto no es posible. La estrategia a seguir será el análisis de la vibración longitudinal en varios puntos de la barra con la TW para ver si podemos detectar los cambios que produce el defecto en la vibración. Al igual que en la sección anterior, trabajaremos en primer lugar con los modos de vibración, es decir, con vibraciones naturales. En la Sección 7.4.2, sin embargo, se trabaja con vibraciones forzadas. Hemos dividido nuestra presentación en dos partes, según que el defecto sea tipo densidad o rigidez.

7.3.2.1. Defecto tipo densidad

a.- Estudio con el primer modo

Como hemos señalado, el sistema físico objeto de nuestro estudio es el mismo de la Sección 7.3.1, es decir, una barra con un defecto en la densidad o en la rigidez, localizado en la posición $x_d=0.4767$. Al igual que ocurre al estudiar la distribución espacial del desplazamiento, a simple vista es imposible saber si una barra tiene un defecto o no, ya que no se pueden apreciar las diferencias entre las vibraciones de la barra con defecto y las de la barra sin defecto (véase la Figura 7.53). En lo que sigue llamaremos $\xi_n^d(t)$ y $\xi_n^{sd}(t)$ a la variación temporal del desplazamiento longitudinal de la barra en un punto determinado de la misma (punto de observación que notaremos por x_0), para el modo de vibración n -ésimo y para las barras con y sin defecto, respectivamente. La Figura 7.53 muestra estas señales para el caso del primer modo de vibración y una intensidad de defecto de $Id=1\%$.

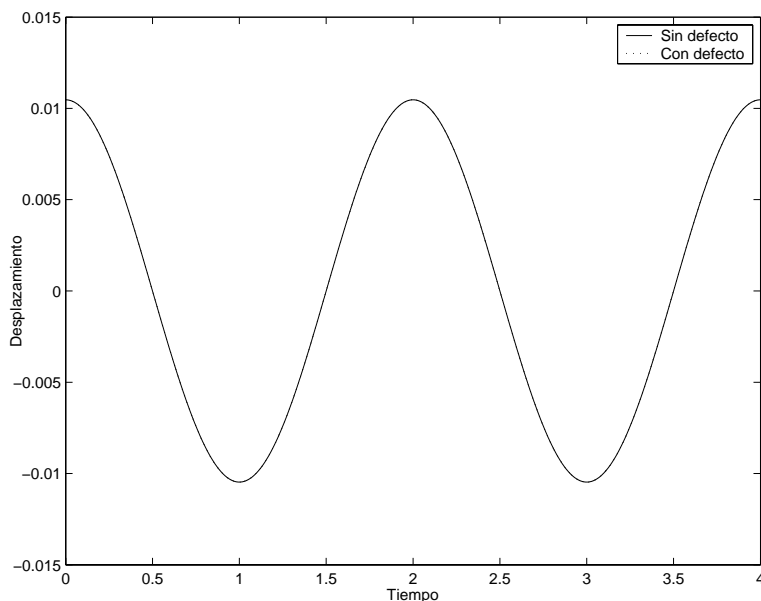


Figura 7.53. $\xi_1^d(t)$ y $\xi_1^{sd}(t)$ en la posición $x_0=0.003$. Barra con defecto de $Id=1\%$ en $x_d=0.4767$.

Para diferenciar entre estas dos señales y, de esta forma, detectar el defecto, recurrimos a la TW. Usaremos $W_n^d(t,j)$ para referirnos a la TW con escala j de la señal $\xi_n^d(t)$. En la Figura 7.54 se representa $W_1^d(t,32)$ para la señal $\xi_1^d(t)$ representada en la Figura 7.53. En ella vemos que aparecen fuertes oscilaciones amortiguadas en tres instantes distintos de tiempo: $t_1=0.47$, $t_2=1.542$ y $t_3=2.491$.

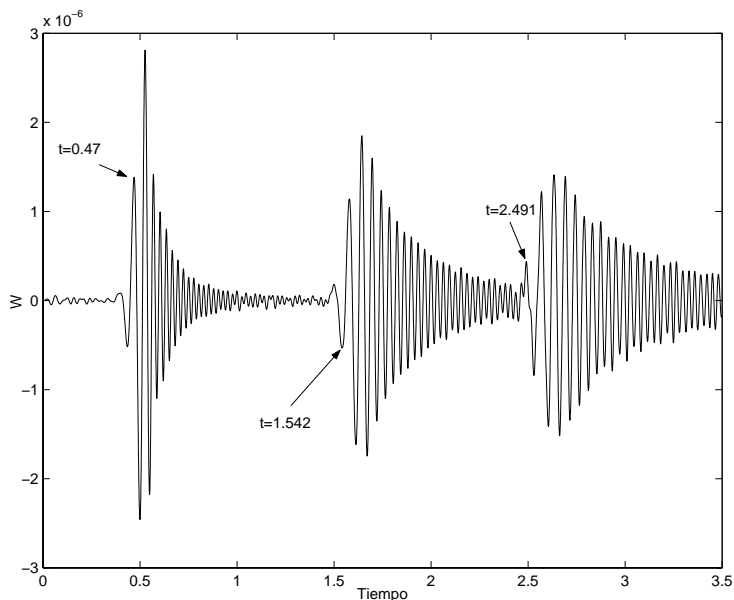


Figura 7.54. $W_1^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.003$. Barra con defecto de $Id=1\%$ en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

Teniendo en cuenta que la velocidad de la onda al trabajar con variables adimensionales es $c=1$, y que la distancia entre el punto de observación ($x_0=0.003$) y la

posición del defecto ($x_d=0.4767$) es 0.467, se puede comprobar que las primeras oscilaciones ($t_1=0.47$) comienzan casi exactamente en el tiempo que tardaría una onda longitudinal en recorrer la distancia entre la posición del defecto y el punto de observación. Así, parece que en el instante inicial se produce una perturbación en el defecto que se va transmitiendo a lo largo de la barra conforme transcurre el tiempo. Esta perturbación no se percibe directamente en la señal de vibración $\xi_1^d(t)$, pero sí se detecta al aplicarle la TW, es decir, en la señal $W_1^d(t,32)$, debido a la capacidad de la TW para amplificar pequeños detalles de la señal.

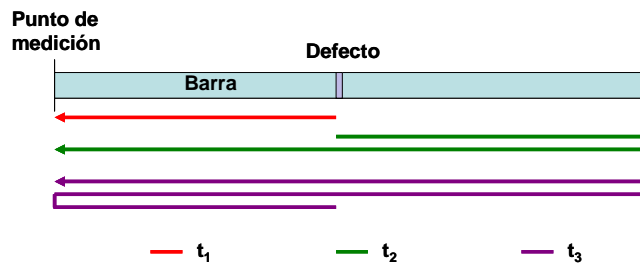


Figura 7.55. Movimiento a lo largo de la barra de las perturbaciones originadas en el defecto. Punto de observación $x_0=0.003$.

Las oscilaciones que se producen en los instantes posteriores (t_2 y t_3), se deben a las reflexiones de la perturbación generada en el defecto en los extremos de la barra y que vuelven a pasar por el punto de observación. Por ejemplo, las oscilaciones que aparecen en $t_2=1.542$, son debidas a que la perturbación producida en el defecto se desplaza también hacia la derecha, se refleja en el extremo derecho de la barra y se transmite a lo largo de la misma hasta el punto de observación, recorrido que se llevaría a cabo en un tiempo teórico de 1.527. El tercer grupo de oscilaciones, que aparecen en $t_3=2.491$, se deben a que cuando la perturbación que produce el primer grupo de oscilaciones, se desplaza inicialmente hacia la izquierda del defecto, se refleja en los dos extremos de la barra y vuelve a pasar por el punto de observación. En la Figura 7.55 se muestra un esquema del origen de estas tres oscilaciones. Estos resultados nos indican que en el instante inicial se produce una perturbación en la posición del defecto, la cual se transmite en ambos sentidos, recorriendo la barra y reflejándose en los extremos. Los tiempos de llegada de estas reflexiones no sólo permiten detectar la existencia del defecto, sino también localizarlo.

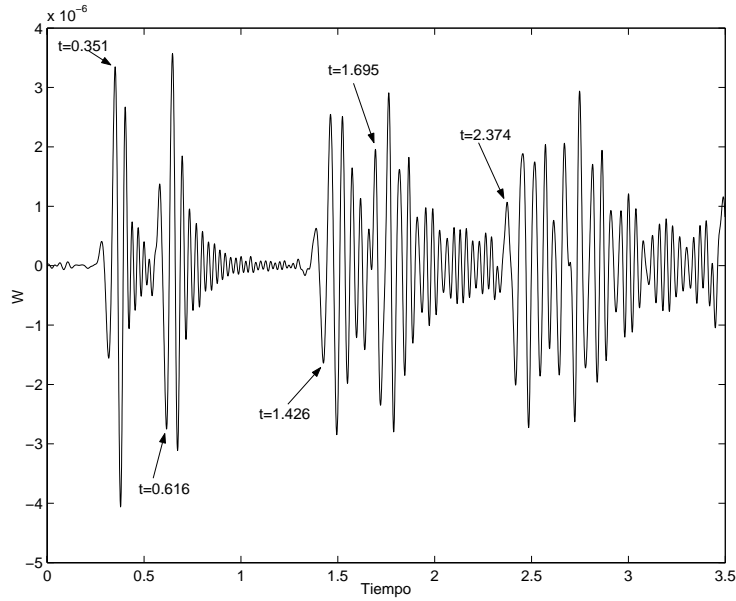


Figura 7.56. $W_1^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$. Barra con defecto de $Id=1\%$ en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

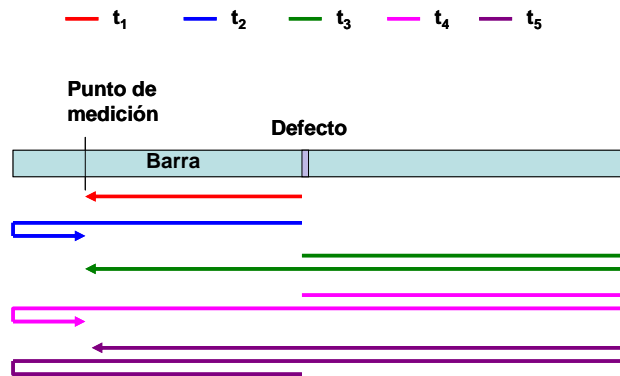


Figura 7.57. Movimiento a lo largo de la barra de las perturbaciones originadas en el defecto. Punto de observación $x_0=0.13$.

Si elegimos otro punto de observación, la situación es algo más compleja, aunque las conclusiones son similares. En la Figura 7.56 se muestra $W_1^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$. En ella se observa que se producen más grupos de oscilaciones, algunos de ellos muy próximos entre sí. En este caso, el tiempo teórico que tarda la onda en recorrer la distancia entre el defecto y el punto de observación es 0.34, por lo que el primer grupo de oscilaciones, situado en $t_1=0.351$, nos indica el instante aproximado en que la perturbación llega directamente desde el defecto hasta el punto de observación. El segundo grupo de oscilaciones (situado en $t_2=0.616$) se produce al reflejarse la onda en el extremo izquierdo de la barra y volver a pasar por el punto de

observación, lo que teóricamente ocurre en el tiempo $t=0.6$. Ese grupo de oscilaciones no aparecía en el punto de observación anterior debido a su proximidad con el extremo de la barra, lo que provoca que la perturbación reflejada se solape con la incidente. La Figura 7.57 muestra un esquema con el origen de las oscilaciones observadas en la Figura 7.56. Del mismo modo, el resto de oscilaciones se originan debido a los distintos pasos de la perturbación por el punto de observación, tras sufrir diferentes reflexiones en los extremos de la barra. Como es lógico, a medida que transcurre el tiempo se van solapando las distintas oscilaciones, haciendo más difícil su identificación.

Se puede comprobar que en todos los puntos de la barra se producen oscilaciones en la señal $W_1^d(t,32)$ en los tiempos correspondientes al paso de la perturbación por el punto de observación. En la Figura 7.58 se muestra $W_1^d(t,32)$ para distintos puntos de observación, junto con los tiempos en los que se producen las distintas oscilaciones. Como comprobación, en la Tabla 7.5 se muestran los tiempos teóricos que tarda una perturbación generada en el defecto en llegar al punto de observación, tras sufrir las reflexiones en los extremos.

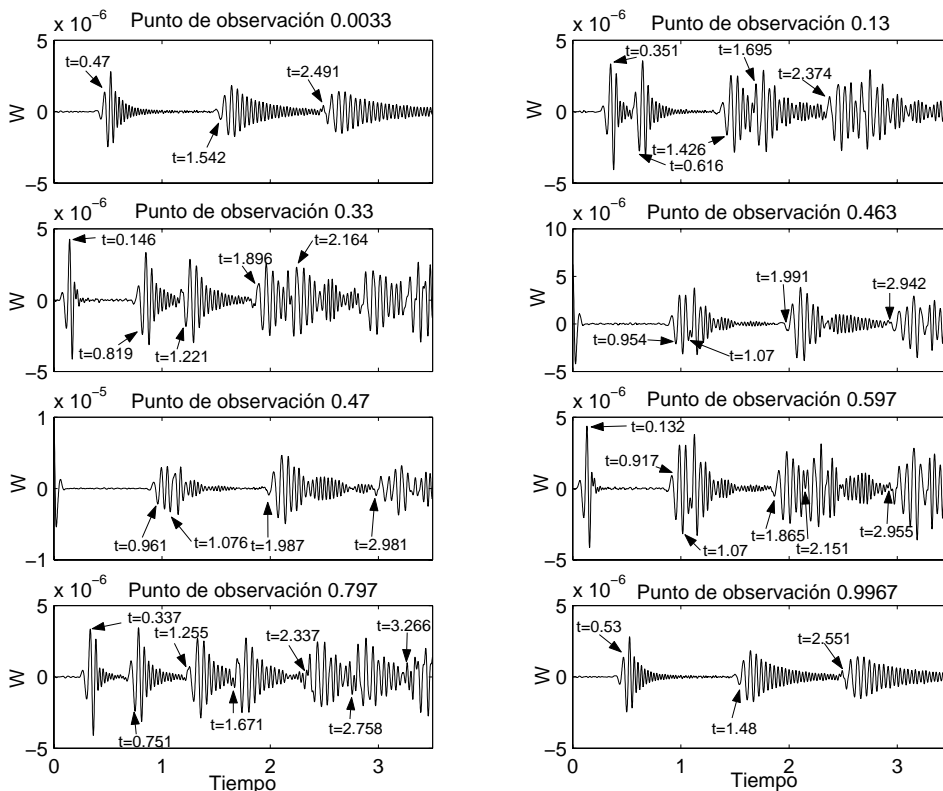


Figura 7.58. $W_1^d(t,32)$ para distintos puntos de observación. Barra con defecto de $Id=1\%$ en $x_d=0.4767$.

Función base Rbio6.8.

	$x_0=0.0033$	$x_0=0.13$	$x_0=0.33$	$x_0=0.463$	$x_0=0.47$	$x_0=0.597$	$x_0=0.797$	$x_0=0.997$
A	0.467	0.34	0.14	0.007	0	0.127	0.327	0.527
B	0.473	0.6	0.8	0.933	0.94	0.933	0.733	0.533
C	1.527	1.4	1.2	1.067	1.06	1.067	1.267	1.467
D	1.533	1.66	1.86	1.993	2	1.873	1.673	1.473
E	2.467	2.34	2.14	2.007	2	2.127	2.327	2.527
F	3.527	3.4	3.2	3.067	3.06	2.933	2.733	2.533
G	2.473	2.6	2.8	2.933	2.94	3.067	3.267	3.467

Tabla 7.5. Tiempos teóricos en los que una perturbación producida en el defecto llegará los distintos puntos de observación. Esos valores deben compararse con los experimentales dados en la Figura 7.58.

Leyenda:

A: Paso de la perturbación antes de reflejarse en algún extremo de la barra (amino directo).

B: Paso de la perturbación después de reflejarse en el extremo más cercano al punto de observación.

C: Paso de la perturbación después de reflejarse en el extremo más lejano al punto de observación.

D: Paso de la perturbación después de dos reflexiones: en primer lugar, en el extremo más alejado y, en segundo lugar, en el más cercano.

E: Paso de la perturbación después de dos reflexiones: en primer lugar, en el extremo más cercano y, en segundo lugar, en el más alejado.

F: Paso de la perturbación después de tres reflexiones: una en el extremo más alejado, otra en el más cercano y una de nuevo en el más alejado.

G: Paso de la perturbación después de tres reflexiones: una en el extremo más cercano, otra en el más alejado y una de nuevo una en el más cercano.

En la Figura 7.58 se puede ver que los tiempos de llegada de los distintos grupos de oscilaciones coinciden en muy buena aproximación con los tiempos teóricos indicados en la Tabla 7.5. En algunos casos, como en $x_0=0.0033$ y en $x_0=0.997$, se solapan dos grupos de oscilaciones, ya que se producen en tiempos muy próximos entre sí. Por otro lado, en las posiciones de observación cercanas al defecto, el primer paso de

la perturbación (A) se produce tan pronto que es imposible cuantificar el tiempo en el que empieza, ya que la oscilación se produce desde el principio.

Todos estos resultados muestran muy claramente que estos grupos de oscilaciones se pueden utilizar para detectar la presencia del defecto y, conocida la velocidad de propagación de la onda en el medio, localizarlo mediante la medición de los tiempos de llegada de las distintas oscilaciones, pudiéndose emplear para ello cualquier punto de observación en la barra. Una vez detectado el defecto (Nivel 1) y localizado (Nivel 2), el siguiente paso es intentar cuantificarlo (Nivel 3). Dada la falta de bibliografía sobre este tema, ha sido necesario investigar y evaluar de qué forma podría ser posible llevar a cabo esta cuantificación de manera que cumpla unos ciertos criterios de homogeneidad y generalidad.

En este sentido, en la Figura 7.59 se muestra $W_1^d(t,32)$ en $x_0=0.13$ para las intensidades de defecto $Id=0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1% . En primer lugar, se observa que, salvo la amplitud, casi todas las funciones $W_1^d(t,32)$ tienen la misma forma, a excepción de las correspondientes a $Id=0.01\%$ e $Id=0.05\%$. Esto nos sugiere que casi con total seguridad, la amplitud de los picos debe ser proporcional a la intensidad del defecto, por lo que se podría usar para su cuantificación. Sin embargo, en lugar de usar la amplitud de un pico como criterio para cuantificar el defecto, nos ha parecido más representativo usar la diferencia entre un mínimo y un máximo consecutivos. En concreto, la diferencia entre el primer mínimo y el primer máximo que marcan el primer paso de la perturbación por $x_0=0.13$. Es lógico usar el primer paso de la perturbación por el punto de observación, ya que después se producen solapamientos entre los grupos de oscilaciones correspondientes a distintos pasos de la perturbación. Sin embargo, la utilización de $x_0=0.13$ como punto de observación es totalmente arbitraria. Debe evitarse, sin embargo, usar puntos de observación muy cercanos a los extremos, pues se superponen distintos grupos de oscilaciones, ni muy cercanos al defecto, ya que en ese caso no se detecta bien el primer paso de la perturbación pues se produce muy rápidamente

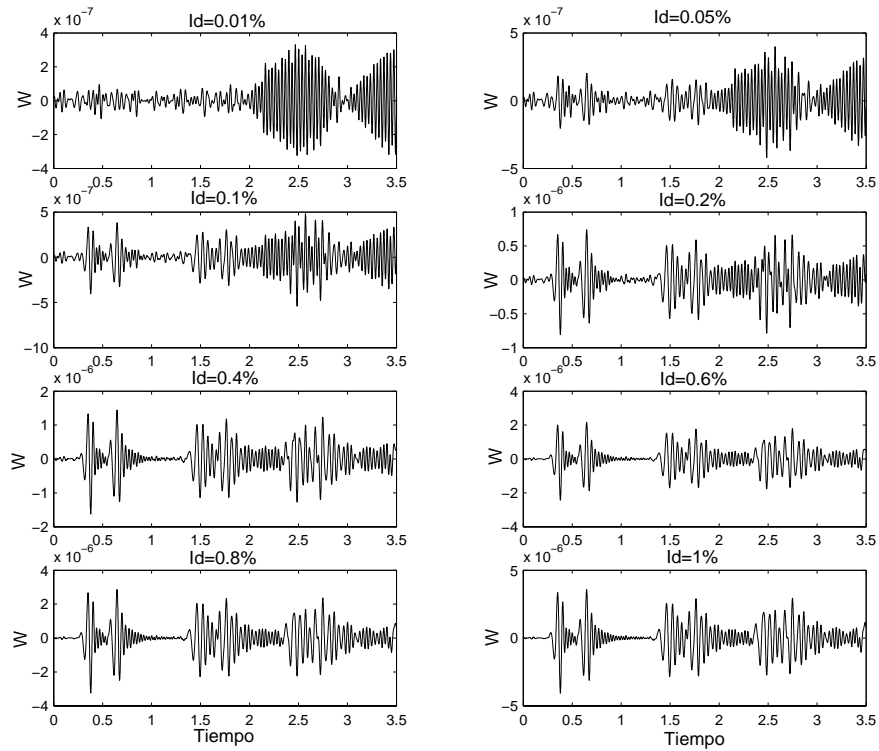


Figura 7.59. $W_1^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

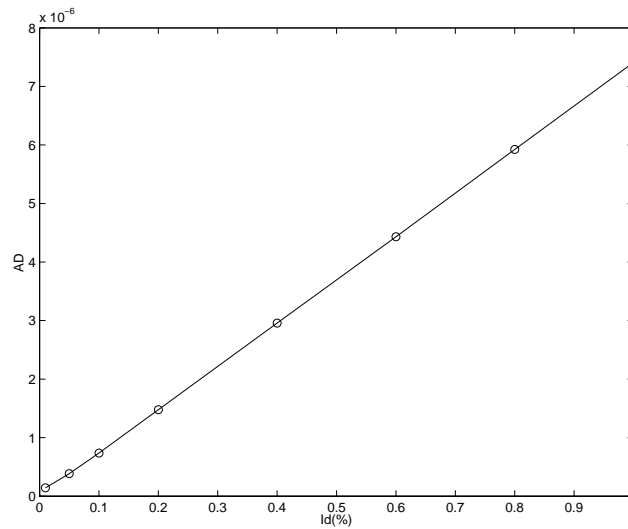


Figura 7.60. $AD(1,32)$ en función de la intensidad de defecto (tipo densidad). Punto de observación $x_0=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

Así pues, con objeto de cuantificar el defecto, definimos el parámetro AD (amplitud del defecto) como *el valor absoluto de la diferencia entre el primer mínimo y máximo que marcan el primer paso de la perturbación por el punto de observación*, es decir:

$$AD(n, j) = \left| W_n^d(t, j)_{\text{máximo}} - W_n^d(t, j)_{\text{mínimo}} \right| \quad (7.13)$$

En la Figura 7.60 se muestra $AD(1,32)$ en función de la intensidad de defecto. En ella se observa una gran linealidad, salvo para bajas intensidades de defecto, para las cuales no es detectable mediante este procedimiento. Esta linealidad obviamente nos permite usar el parámetro AD para cuantificar el defecto (Nivel 3).

b.- Estudio con el segundo, tercer y cuarto modo

Seguidamente presentamos los resultados obtenidos con el resto de los modos de vibración con los que hemos trabajado. Por razones que explicaremos más adelante, hemos dividido la presentación del mismo en dos partes: del modo segundo al cuarto, y del quinto al octavo. En ambos casos nos centraremos en la comprobación de la capacidad de detección de los defectos de cada modo, así como en la variación del parámetro AD con la intensidad de defecto. Para ello fijamos el punto de observación en $x_0=0.13$.

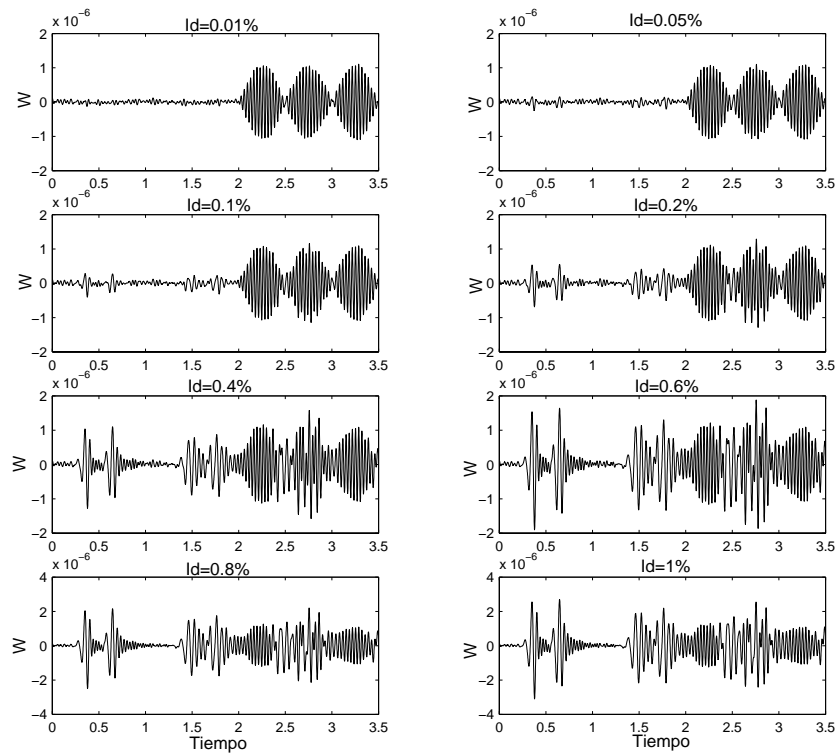


Figura 7.61. $W_2^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

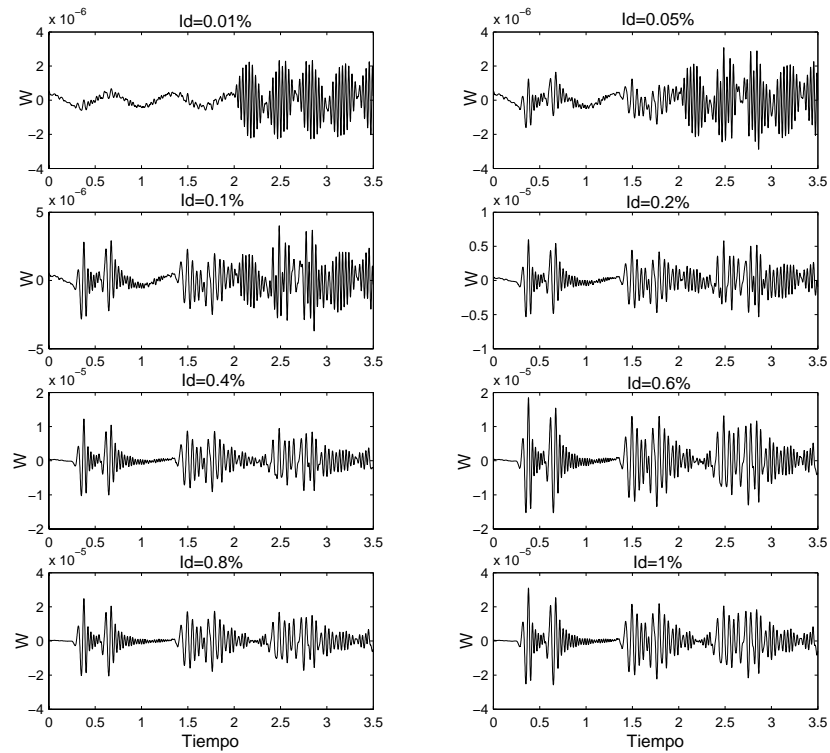


Figura 7.62. $W_3^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

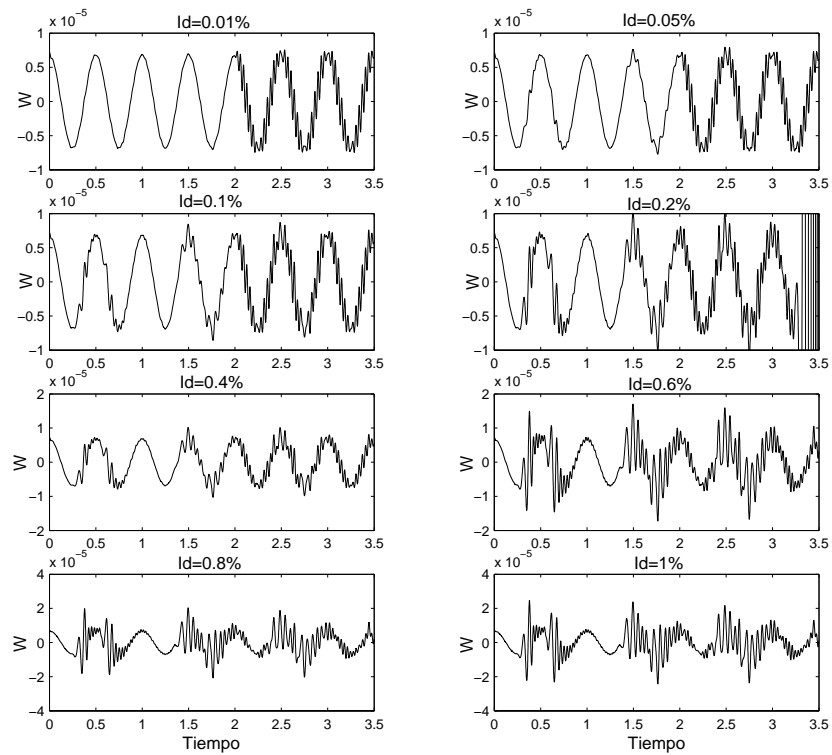


Figura 7.63. $W_4^d(t,32)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

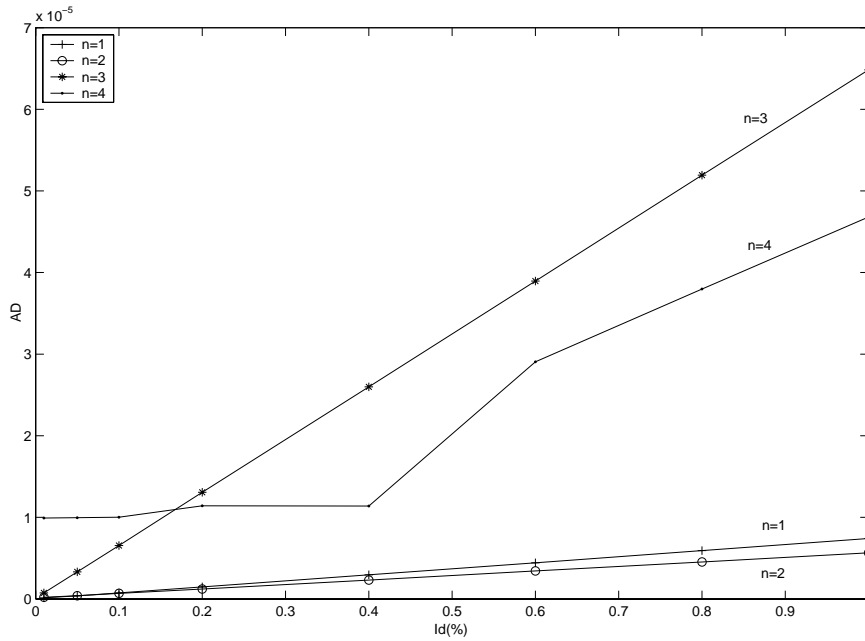


Figura 7.64. $AD(1,32)$, $AD(2,32)$, $AD(3,32)$ y $AD(4,32)$ en función de la intensidad de defecto (tipo densidad). Punto de observación $x_0=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

En las Figuras 7.61-7.63 se pueden ver las funciones $W_2^d(t,32)$, $W_3^d(t,32)$ y $W_4^d(t,32)$, respectivamente, para las diferentes intensidades de defecto. Como vemos, el segundo modo es bastante similar al primero, salvo por el hecho de que no se aprecia la perturbación para intensidades menores a 0.2%. Con el tercer modo se detecta hasta una intensidad de $Id=0.05\%$, incluso ligeramente mejor que con el primero, aunque la función $W_3^d(t,32)$ presenta una ondulación general que no aparece para los dos primeros modos. Se aprecia que el valor de dicha función para $t=0$ no es cero, así como tampoco el valor central de las oscilaciones. Esto justifica la elección de AD como parámetro de cuantificación, en lugar de la amplitud del máximo, ya que esta “ondulación” puede alterar el valor de dicha amplitud. Al trabajar con el cuarto modo, tal ondulación es mucho más acusada, manifestándose para todas las intensidades de defecto, sobre todo para las más bajas, para las que se aprecia que, sin la presencia de las oscilaciones provocadas por la perturbación, la $W_4^d(t,32)$ tiene una forma senoidal. Con este modo la detección es mucho más pobre que con los anteriores, realizándose con claridad solo hasta intensidades de $Id=0.6\%$. En todos los modos se aprecia además que, para intensidades de defecto muy bajas, aparecen oscilaciones de frecuencia muy alta a partir de tiempos superiores a 2, aproximadamente, las cuales no parecen tener sentido físico, por lo que puede tratarse de errores en la simulación con el MSR.

En la Figura 7.64 se muestra la variación de $AD(1,32)$, $AD(2,32)$, $AD(3,32)$ y $AD(4,32)$ con la intensidad de defecto. Es observable que la linealidad de AD con Id se mantiene para cada modo, excepto para intensidades bajas en el modo 4. Al igual que ocurre con la TW espacial, los modos impares tienen valores de AD más altos que sus correspondientes modos pares, y los modos altos son más sensibles que los bajos, aunque en este caso el modo 4 es, evidentemente, el peor modo para trabajar por su baja capacidad de detección.

c.- Estudio con el quinto, sexto, séptimo y octavo modo

La razón para separar el estudio de estos modos de vibración de los anteriores es que a partir del quinto modo, la TW temporal a escala 32 no permite detectar la perturbación generada en el defecto, siendo necesario usar escala 20, escala que para los modos anteriores no es nada efectiva. Dado que la escala se encuentra directamente relacionada con la frecuencia de la señal, es posible que con estos modos cambie la frecuencia de la perturbación, y por tanto, la escala adecuada para su detección. Esto nos muestra que la escala con la que hay que trabajar no debe estar fijada a priori, sino que en cada caso es necesario buscar la más adecuada.

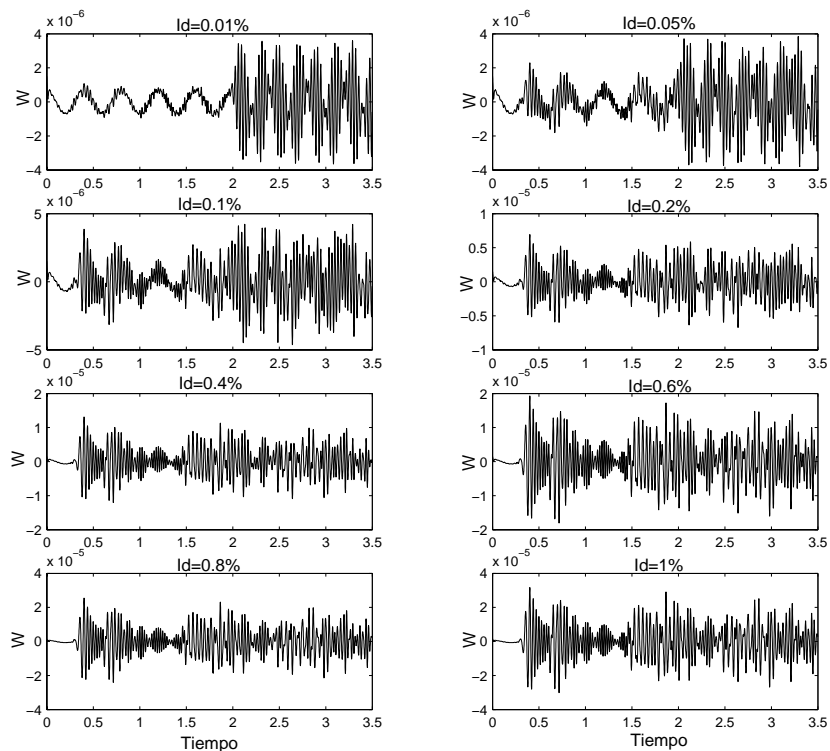


Figura 7.65. $W_5^d(t, 20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

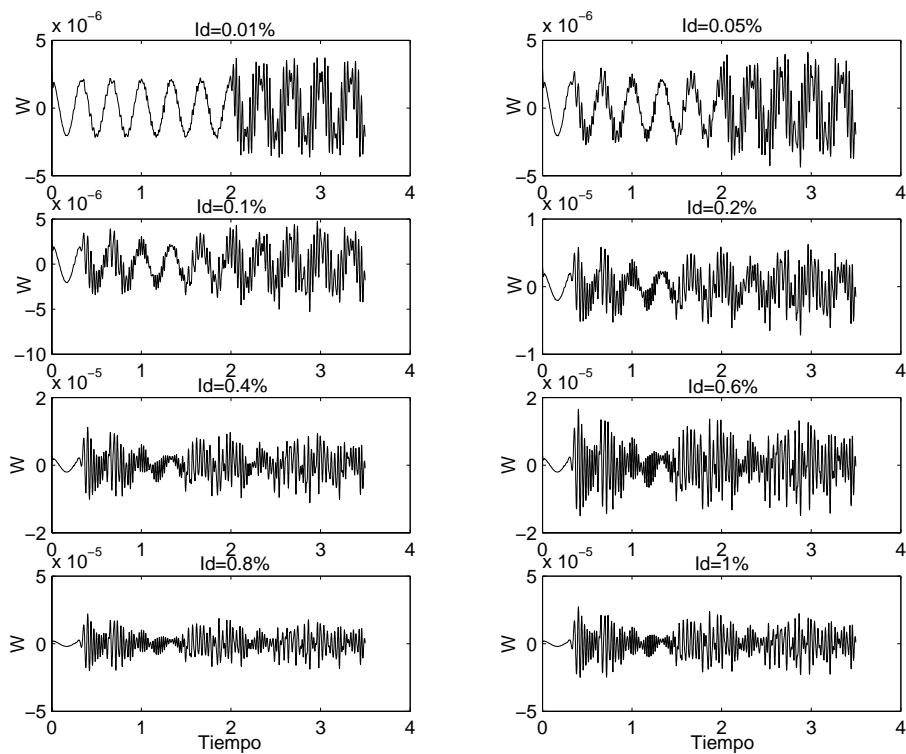


Figura 7.66. $W_6^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

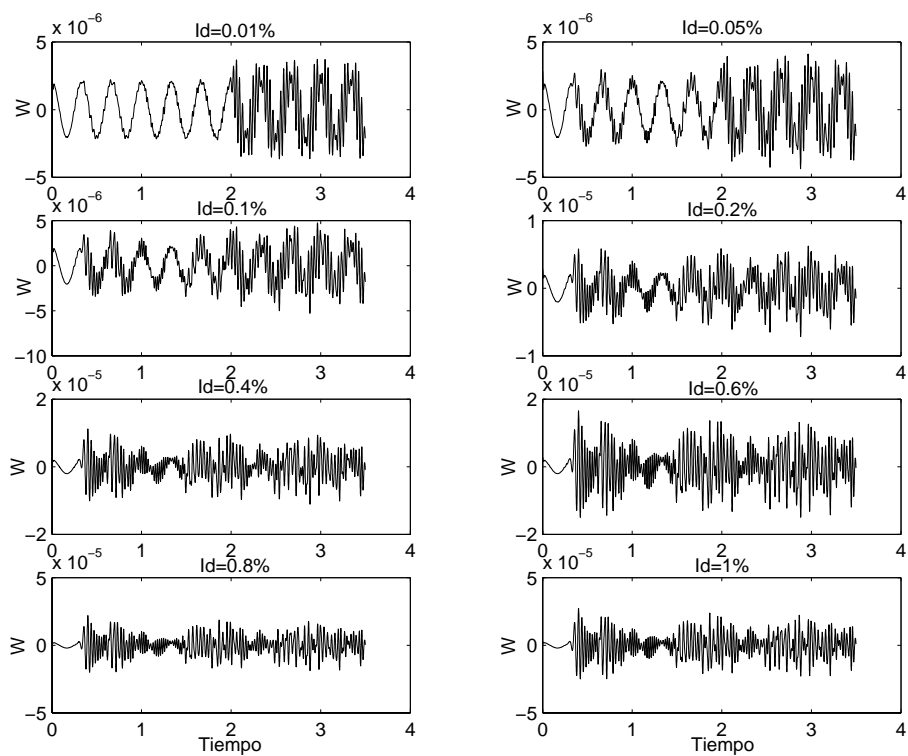


Figura 7.67. $W_7^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

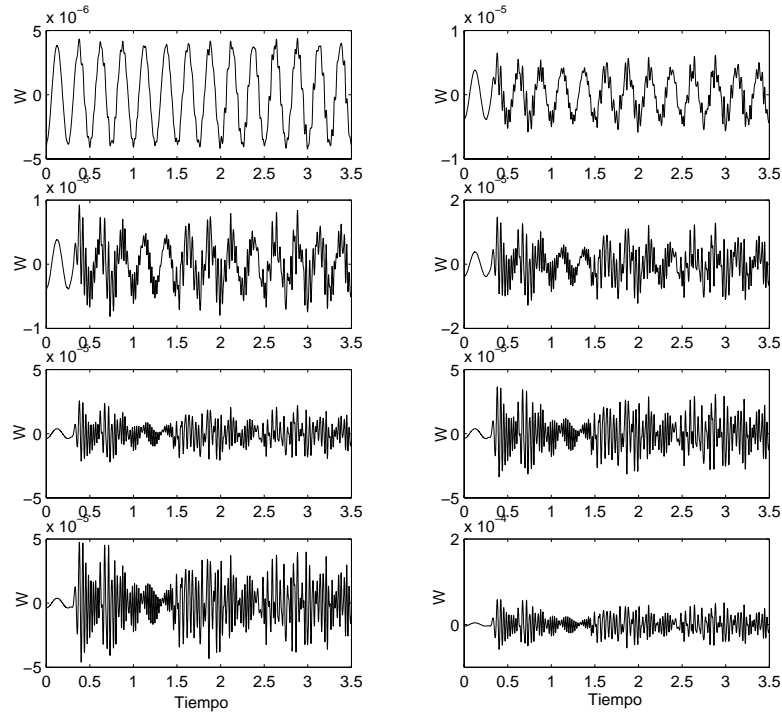


Figura 7.68. $W_8^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo densidad). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

En las Figuras 7.65-7.68 se muestran los resultados obtenidos al aplicar al TW con escala 20 para los modos 5-8. Puede verse que las oscilaciones que se producen al paso de la perturbación tienen una frecuencia más alta que con los modos anteriores (los modos son de orden más alto, y por tanto, producen en el defecto una perturbación de mayor frecuencia). Eso es lo que motiva que sea necesario trabajar con una escala menor que para los modos bajos. Además, estas oscilaciones tienen la misma forma y empiezan en los mismos tiempos que en los casos anteriores, siendo por tanto igualmente válidas para detectar y localizar el defecto. Vemos que todos los modos detectan el defecto hasta una intensidad $Id=0.05\%$, aunque para el modo 6 esa detección no es tan clara como para el resto. Además, para defectos bajos, a partir de un tiempo $t=2$, aparecen oscilaciones que no están asociadas al defecto (igual que ocurre para los modos 1-4), y que son ruido numérico.

Otra característica a destacar es la forma senoidal que parece adoptar el valor medio de las funciones $W_5^d(t,20)-W_8^d(t,20)$, que también se aprecia al trabajar con los modos 3 y 4. A partir del modo 6 este fenómeno es muy acusado. A pesar de esta forma senoidal, la variación de $AD(5,20)$, $AD(6,20)$, $AD(7,20)$ y $AD(8,20)$ con la intensidad de defecto, mostrada en la Figura 7.69, es lineal para todos los modos, salvo para $Id \leq 258$

0.05%, comprobándose de nuevo que AD es un parámetro adecuado para la cuantificación del defecto (Nivel 3). Se aprecia que, para los defectos con $Id \leq 0.05\%$ la linealidad de AD con Id varía según el modo con el que trabajamos. Solamente se mantiene la linealidad para todo el rango de intensidades en el caso del modo 5, incluso para el defecto con $Id=0.01\%$. En el modo 6 la linealidad se mantiene hasta $Id=0.05\%$. Sin embargo, para los modos 7 y 8 la linealidad se pierde a partir de $Id=0.05\%$, a pesar de que en las Figuras 7.67 y 7.68 se observa que la perturbación es detectable. Por otro lado, puede verse que el modo 5 produce valores de AD más altos que el 6, el 7 mayores que el 8, y estos dos últimos mayores que los modos 5 y 6. Curiosamente, en la TW espacial el modo 8 es mejor que el 7, mientras que aquí sucede lo contrario. Parece, por tanto, que en la TW temporal influye más el hecho de que el valor del desplazamiento de la barra en el defecto para el modo 7 sea mayor que para el modo 8, que el orden del modo propiamente dicho.

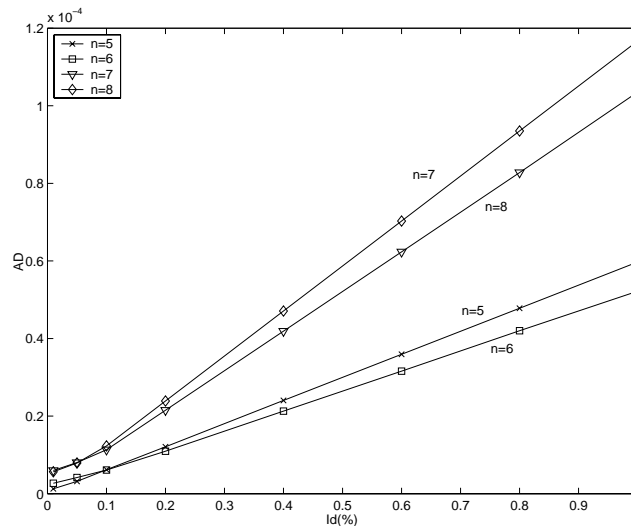


Figura 7.69. $AD(5,20)$, $AD(6,20)$, $AD(7,20)$ y $AD(8,20)$ en función de la intensidad de defecto (tipo densidad). Punto de observación $x_0=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

7.3.2.2.- Defecto tipo rigidez

a.- Estudio con el primer modo

En la Figura 7.70 se muestra $W_1^d(t,32)$ en varias posiciones x_0 de la barra, para una intensidad de defecto $Ir=1\%$. En ella se ve que los grupos de oscilaciones marcan el paso de la perturbación producida en el defecto, de la misma manera que cuando el defecto es tipo densidad, lo que se puede comprobar comparando los tiempos de

comienzo de los grupos de oscilaciones obtenidos de estas figuras con los tiempos teóricos reflejados en la Tabla 7.5.

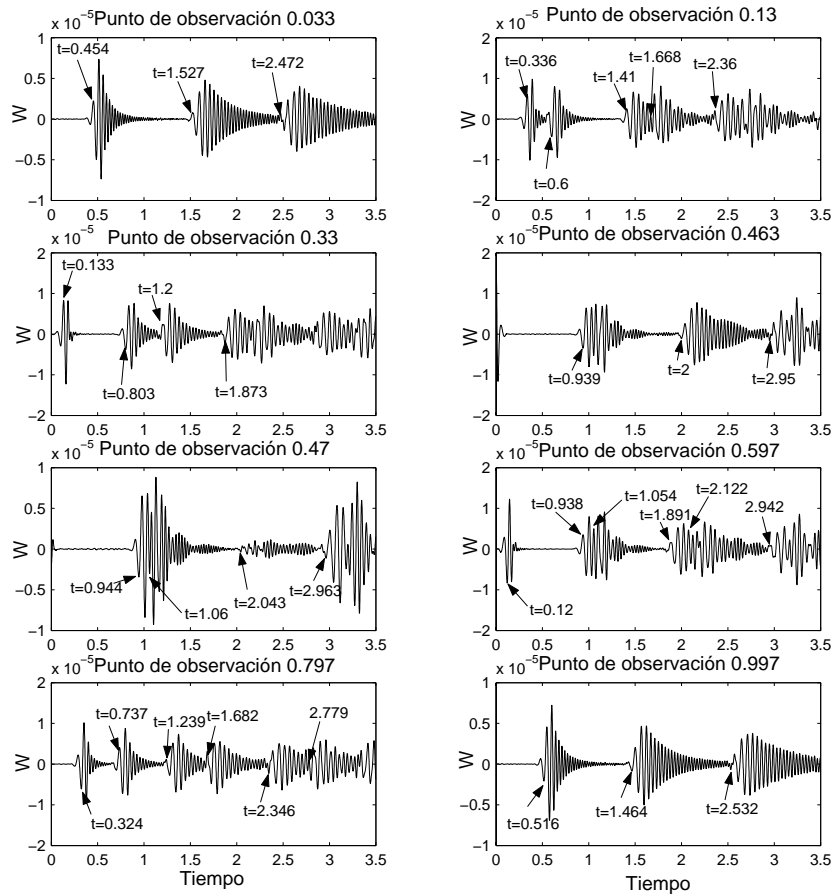


Figura 7.70. $W_1^d(t,32)$ para distintos puntos de observación. Barra con defecto de $I_r=1\%$ en $x_d=0.4767$.

Función base Rbio6.8.

Si nos fijamos en la posición $x_0=0.13$ y estudiamos como se comporta la función $W_1^d(t,32)$ para varias intensidades de defecto (véase la Figura 7.71), vemos que, como era de esperar, las oscilaciones comienzan en tiempos muy similares de unas intensidades de defecto a otras, y además su forma es muy parecida. Esto se detecta con claridad hasta $I_r=0.05\%$. Por esta razón se puede utilizar de nuevo el parámetro AD para cuantificar la intensidad de defecto. La Figura 7.72 muestra $AD(1,32)$ en función de la intensidad de defecto, que como vemos presenta un comportamiento lineal, incluso hasta $I_r=0.01\%$.

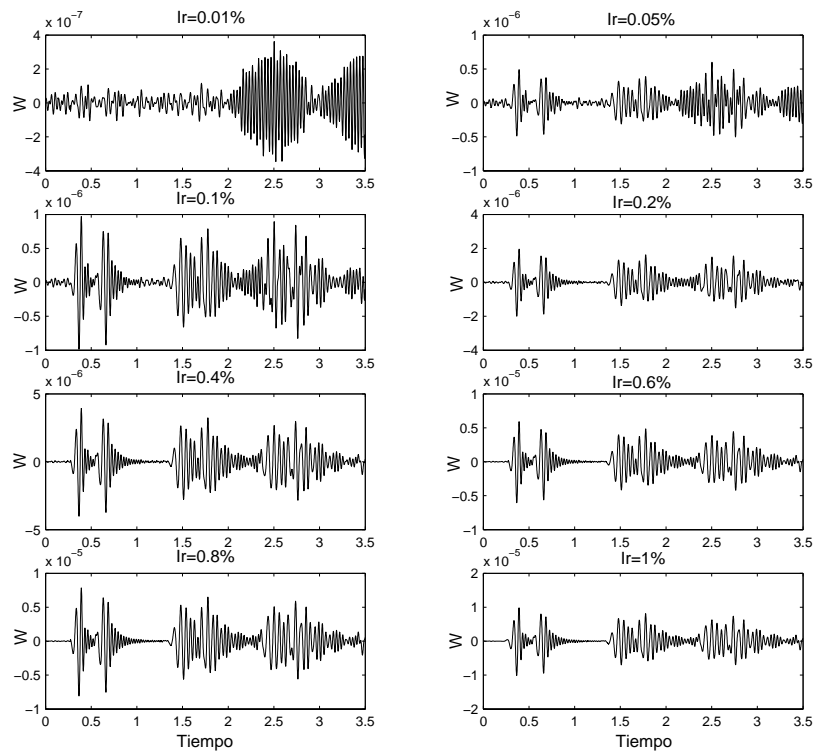


Figura 7.71. $W_1^d(t,32)$ para $x_0=0.13$ y varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

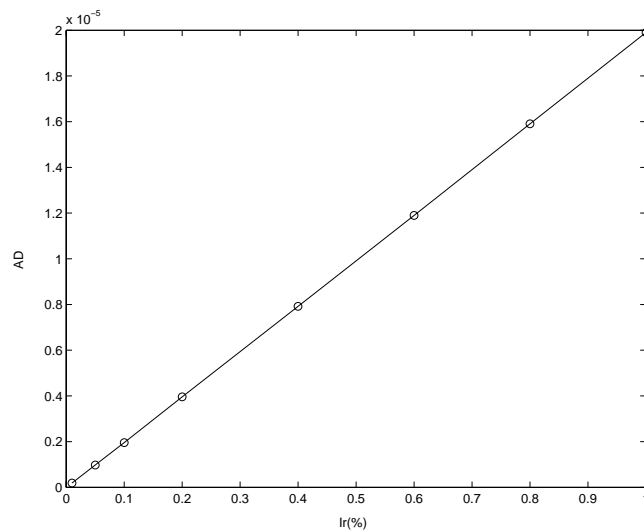


Figura 7.72. $AD(1,32)$ en función de la intensidad de defecto (tipo rigidez). Punto de observación $x_0=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

b.- Estudio con el segundo, tercer y cuarto modo

De la misma forma que ocurre cuando el defecto es tipo densidad, a partir del quinto modo la perturbación producida por el defecto pasa de ser detectada con escala

32 a serlo con escala 20, razón por la cual hemos dividido nuestro estudio en dos partes.

Al estudiar el comportamiento de $W_2^d(t,32)$ en $x_0=0.13$ (Figura 7.73) se observa que, a diferencia de lo que ocurre con el primer modo, el defecto se detecta perfectamente en todo el rango de intensidades consideradas, incluyendo el defecto con $I_r=0.01\%$. Con el tercer modo (Figura 7.74) la detección es posible también hasta $I_r=0.01\%$, aunque de una forma menos clara, ya que, al igual que ocurre con el defecto en la densidad, empieza a detectarse una variación senoidal del valor medio de la función $W_3^d(t,32)$ con el tiempo. Este fenómeno es muy acentuado con el modo 4 ($W_4^d(t,32)$ en la Figura 7.75), aunque también se puede detectar la presencia del defecto hasta $I_r=0.01\%$. Para el resto de intensidades de defecto, se observa que no hay ningún problema de detección.

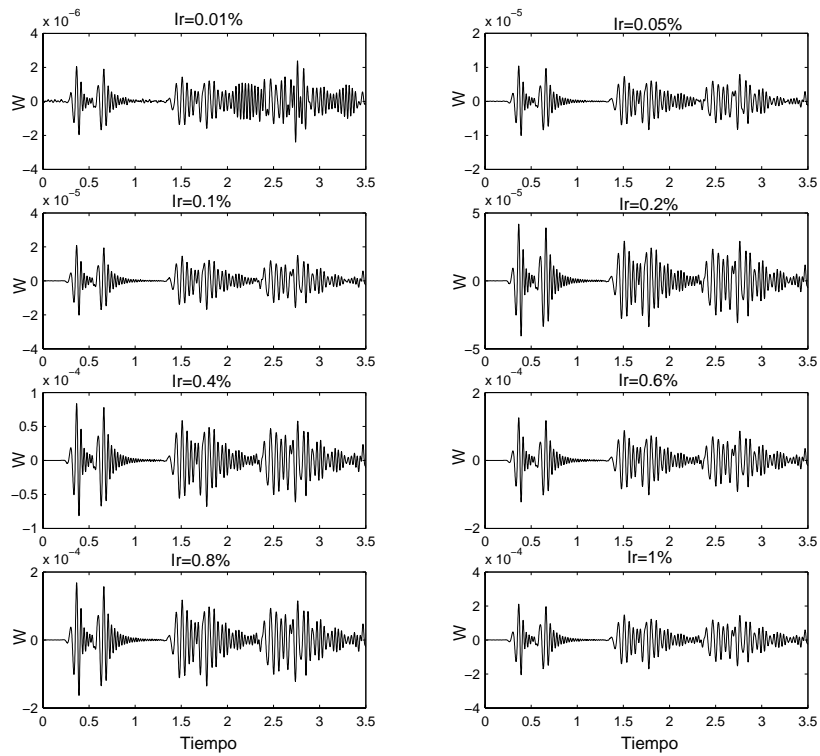


Figura 7.73. $W_2^d(t,32)$ para $x_0=0.13$ y varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

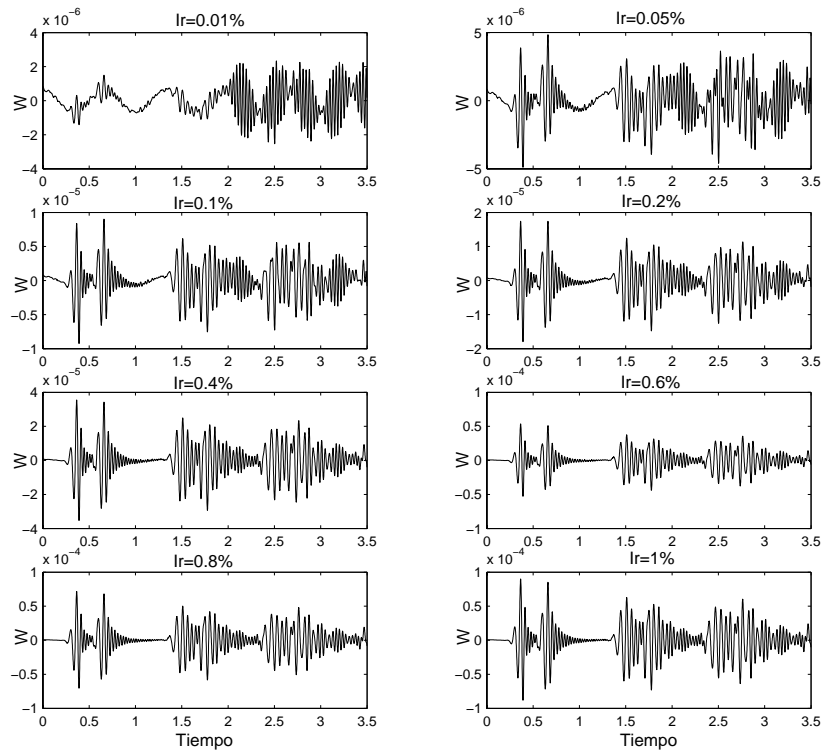


Figura 7.74. $W_3^d(t, 32)$ para $x_0=0.13$ y varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

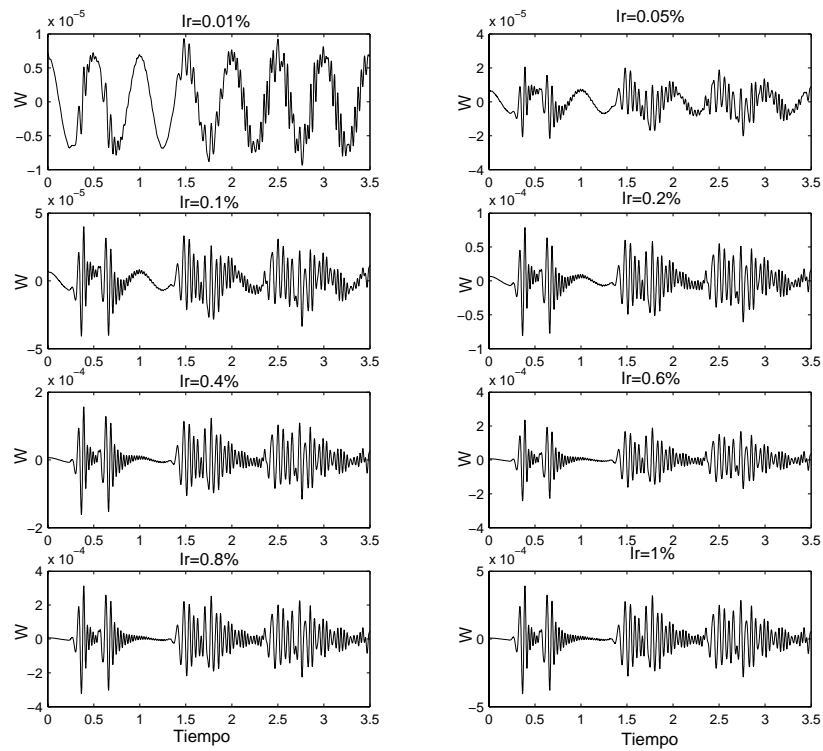


Figura 7.75. $W_4^d(t, 32)$ para $x_0=0.13$ y varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

Por lo tanto, observando estas figuras parece que entre estos modos de vibración el que proporciona mejores resultados es el modo 2, pues permite detectar con toda claridad hasta intensidades de $I_r=0.01\%$. En la Figura 7.76 se muestra la variación de $AD(1,32)$, $AD(2,32)$, $AD(3,32)$ y $AD(4,32)$ con la intensidad de defecto. En ella se observa que el modo 4 es el que proporciona los valores más altos del parámetro AD , seguido por el modo 2. Otro aspecto a destacar es su linealidad para todas las intensidades de defecto, mayor que cuando el defecto es tipo densidad.

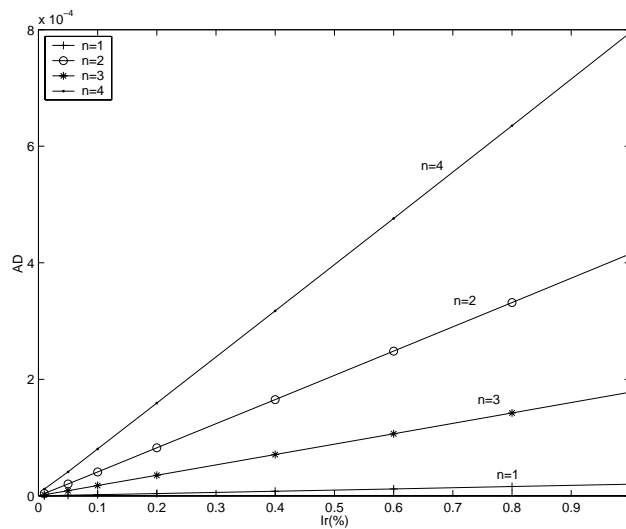


Figura 7.76. $AD(1,32)$, $AD(2,32)$, $AD(3,32)$ y $AD(4,32)$ en función de la intensidad de defecto (tipo rigidez). Punto de observación $x_o=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

c.- Estudio con el quinto, sexto, séptimo y octavo modo

Como se ha comentado anteriormente, al trabajar con estos modos es necesario utilizar la escala 20. La ondulación en el valor medio de las funciones $W_5^d(t,32)$ (Figura 7.77), $W_6^d(t,32)$ (Figura 7.78), $W_7^d(t,32)$ (Figura 7.79) y $W_8^d(t,32)$ (Figura 7.80) se sigue produciendo para bajas intensidades de defecto, acentuándose al aumentar el orden del modo. En todos los modos se detectan todas las intensidades de defecto estudiadas, aunque en el modo 7 la detección para $I_r=0.01\%$ resulta algo confusa.

Con estos resultados, junto con los de los modos anteriores, se comprueba que, al igual que ocurría con la TW espacial, es más fácil detectar defectos con intensidad baja cuando estos se encuentran en la rigidez que en la densidad.

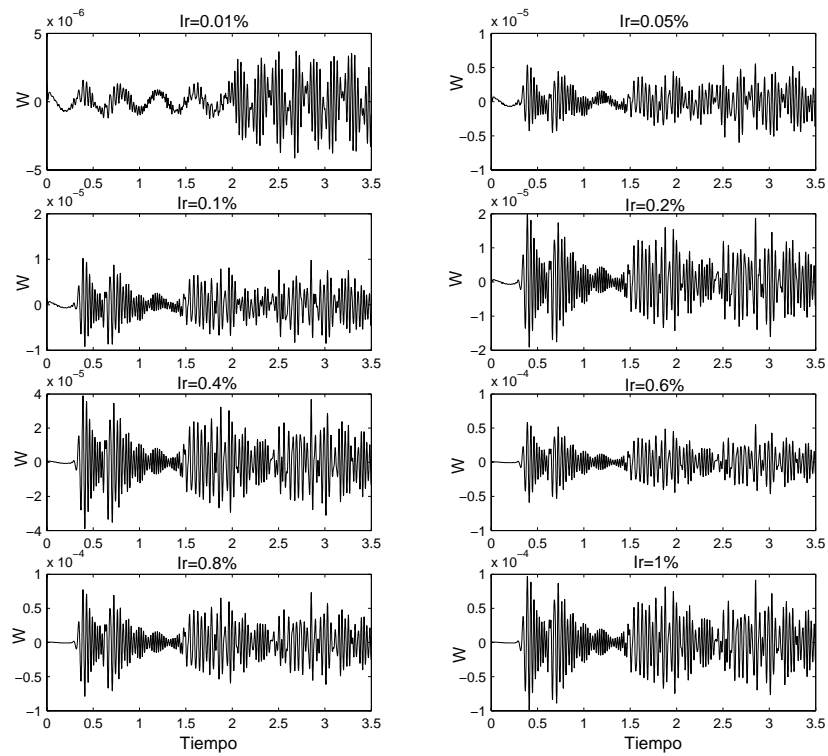


Figura 7.77. $W_5^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

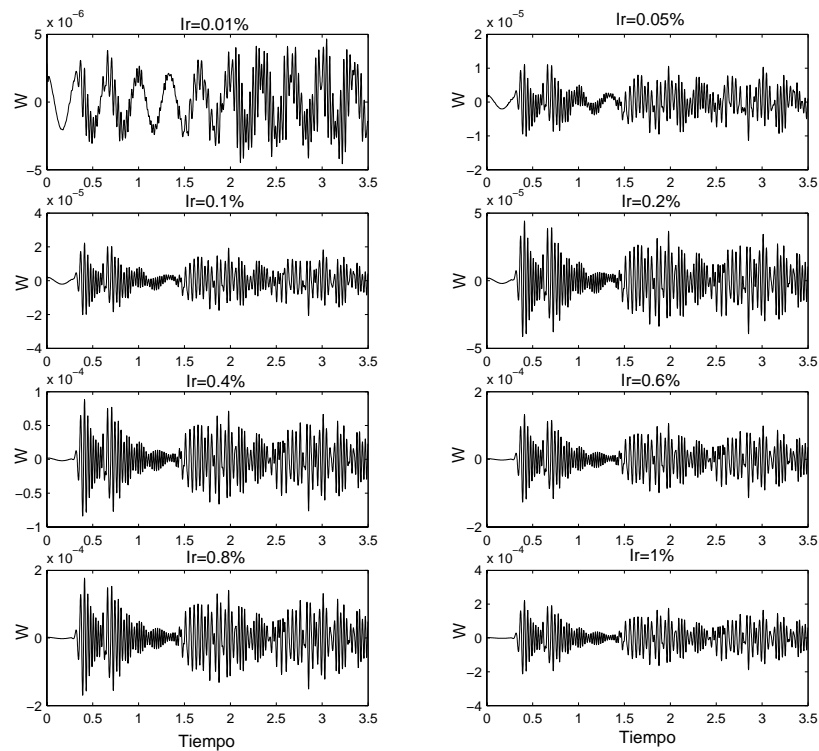


Figura 7.78. $W_6^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

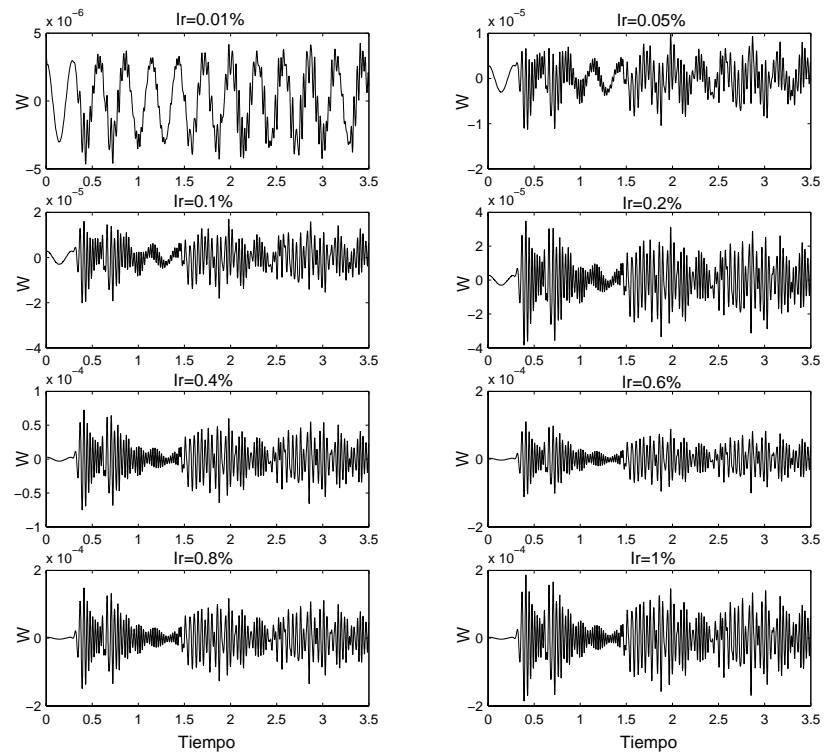


Figura 7.79. $W_7^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

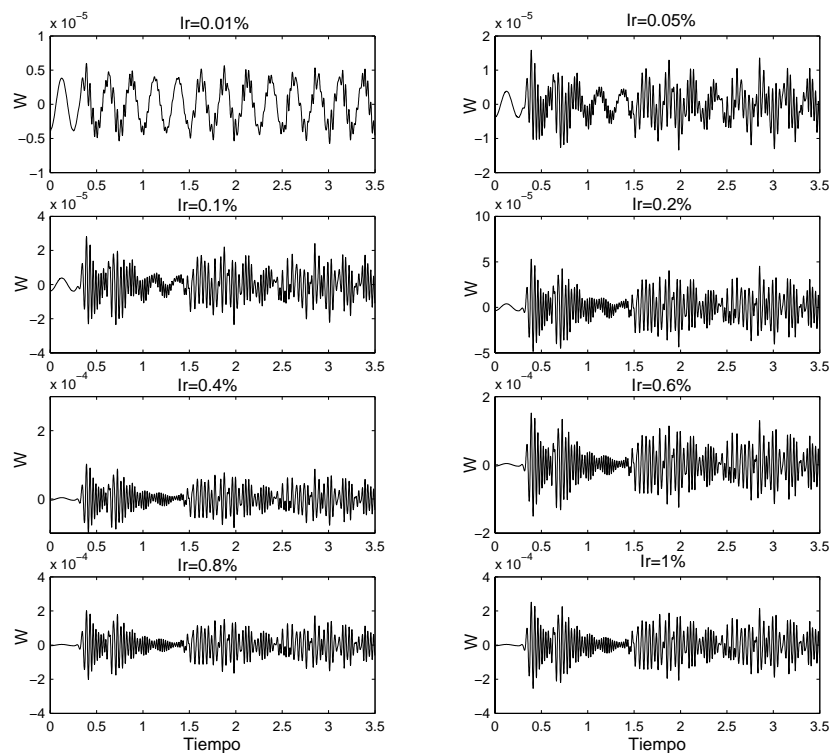


Figura 7.80. $W_8^d(t,20)$ en la posición $x_0=0.13$ y para varias intensidades de defecto (tipo rigidez). Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base Rbio6.8.

La variación de AD con Ir para los modos 5-8, mostrada en la Figura 7.81, es completamente lineal para todos los modos e intensidades de defecto, lo que vuelve a probar la gran capacidad de detección de defectos en la rigidez mediante la TW temporal. En cuanto a la ordenación de la calidad de detección de los modos mediante el parámetro AD , puede observarse que es idéntica a la encontrada para la TW espacial: 8°, 6°, 7° y 5°. Por lo tanto, los criterios de ordenación de los modos se siguen manteniendo: A mayor orden del modo, mejor detección, y a mayor proximidad del defecto a un vientre de la fuerza (nodo del desplazamiento), mejor detección.

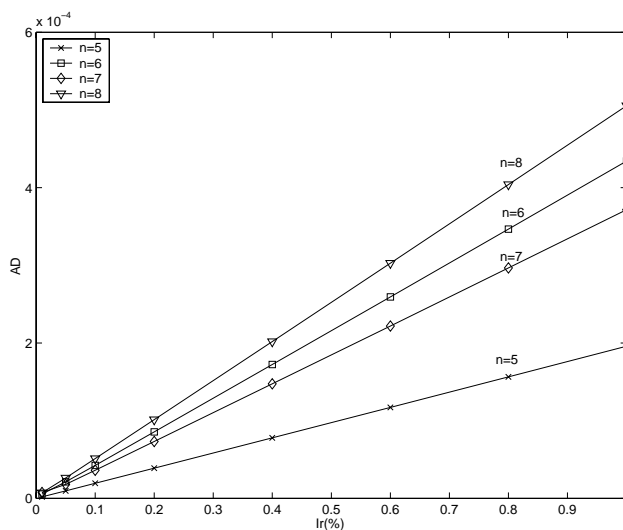


Figura 7.81. $AD(5,32)$, $AD(6,32)$, $AD(7,32)$ y $AD(8,32)$ en función de la intensidad de defecto (tipo rigidez). Punto de observación $x_0=0.13$. Barra con defecto en $x_d=0.4767$. Función base $R_{bio}6.8$.

7.4.- Detección de defectos mediante vibraciones forzadas

En la sección anterior hemos trabajado con las vibraciones libres de la barra como señales para la detección de defectos, ya sean señales espaciales o temporales. En la bibliografía existente sobre la aplicación de la TW a las vibraciones de barras para la detección de defectos, casi en todos los casos se trabaja, de una forma u otra, con los modos propios de la barra, o bien, en situaciones estáticas [7.12, 7.14]. Hasta la fecha no se ha explorado la posibilidad de detectar daño a partir de vibraciones forzadas. Esto, en nuestra opinión, es una grave carencia, pues experimentalmente estas vibraciones son más fáciles de generar. Incluso, en las ocasiones en las que se trabaja experimentalmente con modos propios se suele excitar a la barra con fuerzas senoidales cuyas frecuencias coinciden con las frecuencias naturales de la barra [7.7].

En esta Memoria demostramos como también es posible detectar defectos mediante vibraciones forzadas, que también hemos generado con el MSR.

Hay algunas diferencias entre trabajar con vibraciones libres y hacerlo con vibraciones forzadas. En el primer caso se trata de ondas estacionarias, que no cambian su forma con el tiempo, mientras que en el segundo la forma de la onda en todo punto de la barra varía con el tiempo. Esta variación hace que, en principio, no podamos saber si va a ser posible llevar a cabo la detección del defecto o no. Otro problema añadido es que los resultados varían considerablemente con el tiempo o posición que elijamos para medir la onda, así como con la forma de la fuerza que apliquemos.

El estudio que presentamos en esta sección lo hemos dividido, al igual que para las vibraciones libres, en señales de vibración espaciales y temporales. En el primer caso se trabaja con la señal de vibración en función de la posición a lo largo de la barra, en un tiempo fijo. En el segundo, por el contrario, se mantiene fija la posición y medimos en un punto determinado de la barra la señal de vibración a lo largo del tiempo, señal con la que trabajamos para la detección del daño.

7.4.1.- Con señales espaciales

El estudio para señales espaciales lo hemos llevado a cabo con dos tipos de fuerzas aplicadas, una senoidal y otra tipo pulso gaussiano, ambas aplicadas en $x=0$.

La expresión analítica del pulso gaussiano de fuerza es:

$$\sigma_a(t) = e^{-100^2(t-0.05)^2} \quad (7.14)$$

Se trata de un pulso muy estrecho, semejante a una fuerza impulsiva.

La expresión analítica de la fuerza senoidal de frecuencia f_a es:

$$\sigma_a(t) = \text{sen}(2\pi f_a t) \quad (7.15)$$

En este caso, dada la gran diferencia de comportamiento de la barra según la frecuencia de la fuerza aplicada, hemos trabajado con un amplio rango de frecuencias, intentando comprobar cuales se ajustan mejor a nuestro objetivo de detección de daño. En concreto hemos considerado las frecuencias: 0.4, 0.7, 1.3, 3.14 y 4.85.

Hemos realizado nuestro estudio para los dos tipos de defecto, densidad y rigidez, considerando en ambos casos las intensidades: 25, 15, 5, 1, 0.5, 0.1 , 0.05 y 0.01% . En todos los estudios hemos considerado un defecto situado en la posición $x_d=0.4767$.

La Figura 7.82 muestra el modelo en red para las vibraciones forzadas de una barra con un defecto en la posición genérica x_d , excitada en el extremo izquierdo.

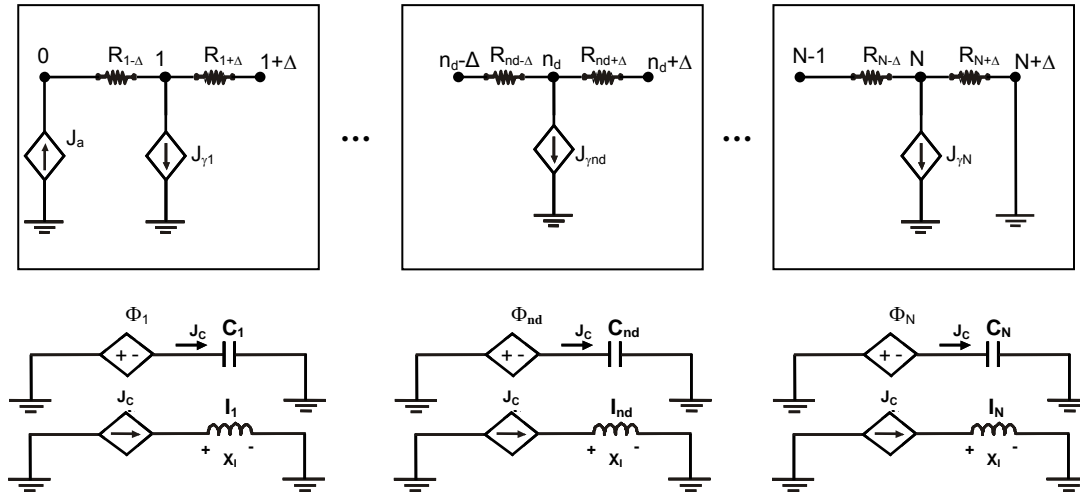


Figura 7.82. Modelo en red para las vibraciones longitudinales de una barra con un defecto en la posición x_d , para una fuerza aplicada en el extremo izquierdo y con el extremo derecho fijo.

7.4.1.1.- Defecto tipo densidad

a.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.4

Esta frecuencia de vibración, bastante baja, se encuentra situada entre la primera y la segunda frecuencia natural de la barra. Por esta razón, la forma de la onda varía poco a lo largo del tiempo. Es por ello que hemos considerado únicamente la onda en dos instantes de tiempo:

$-t_1=1.25$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo de la barra).

$-t_2=1.62$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

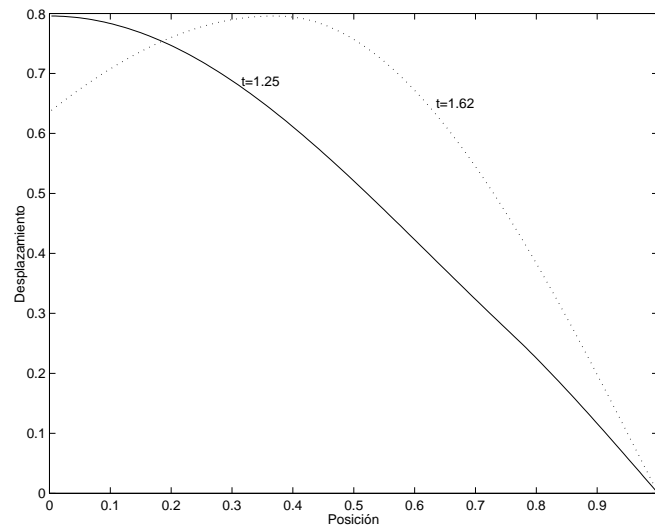


Figura 7.83. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 0.4 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=1.25$ y $t_2=1.62$.

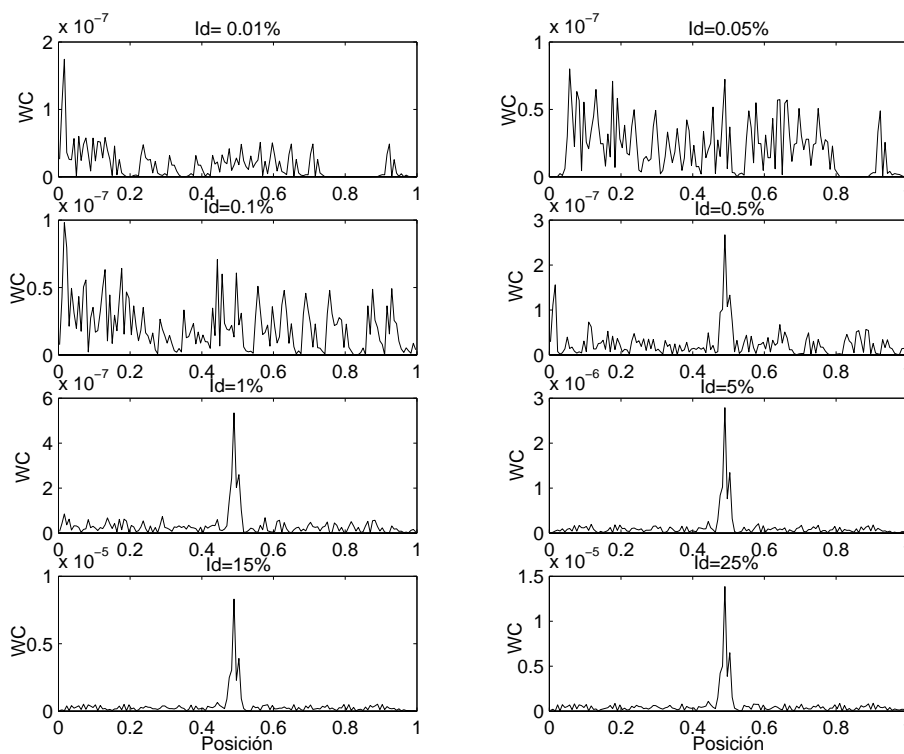


Figura 7.84. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=1.62$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 0.4.

En la Figura 7.83 se representa el desplazamiento de la barra sin defecto en estos dos instantes de tiempo, obtenido mediante el MSR. Puede verse que la vibración en ambos instantes es muy suave, sin cambios bruscos. Una vez incluido el defecto y realizar la TW de la señal de vibración obtenida en ambos instantes de tiempo hemos

observado que para los dos es posible la detección del defecto. No obstante, para t_2 la capacidad de detección es mayor, detectándose defectos de intensidad igual o superior a $I_d=0.5\%$, tal y como se puede apreciar en la Figura 7.84. Para el tiempo t_1 , sin embargo, el defecto se detecta bien solo a partir de la intensidad $I_d=5\%$.

b.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.7

Esta frecuencia se encuentra cerca de la segunda frecuencia natural de la barra, y aunque no es muy alta, la forma de la onda cambia algo más rápidamente. En este caso hemos estudiado 6 instantes de tiempo distintos:

- $t_1=0.72$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_2=1.20$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_3=1.36$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

- $t_4=2.05$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_5=2.68$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_6=2.74$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

En la Figura 7.85 se muestra el desplazamiento de la barra en estos tiempos, el cual, sigue siendo suave, aunque varía más rápidamente que en el caso de la frecuencia 0.4. De nuevo hemos comprobado que con todas estas formas de onda se puede detectar el defecto, aunque la mejor detección se obtiene para el tiempo t_1 , en cuyo caso se puede detectar hasta el 0.5% de intensidad (véase la Figura 7.86).

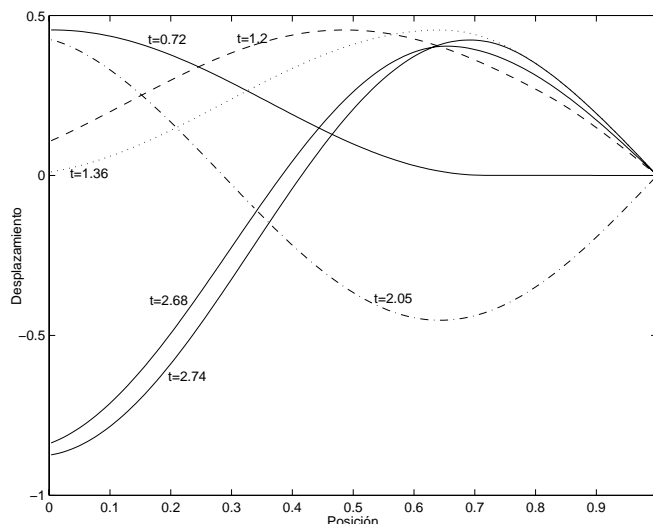


Figura 7.85. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 0.7 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.72$, $t_2=1.20$, $t_3=1.36$, $t_4=2.05$, $t_5=2.68$ y $t_6=2.74$.

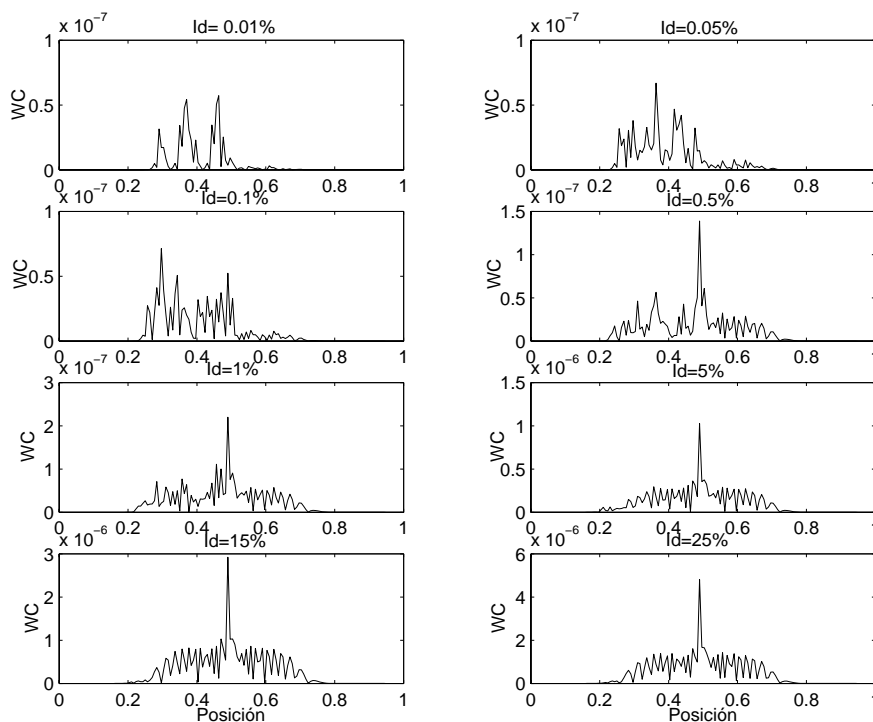


Figura 7.86. $WC(x, 2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_1=0.72$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 0.7.

c.- Fuerza senoidal de frecuencia 1.3

Con esta frecuencia se producen cambios más significativos en la forma de las vibraciones a lo largo del tiempo, tal y como puede observarse en la Figura 7.87. En este caso los tiempos estudiados han sido:

$-t_1=0.39$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_2=0.87$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_3=1.19$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

$-t_4=1.43$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=1.73$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=2.35$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

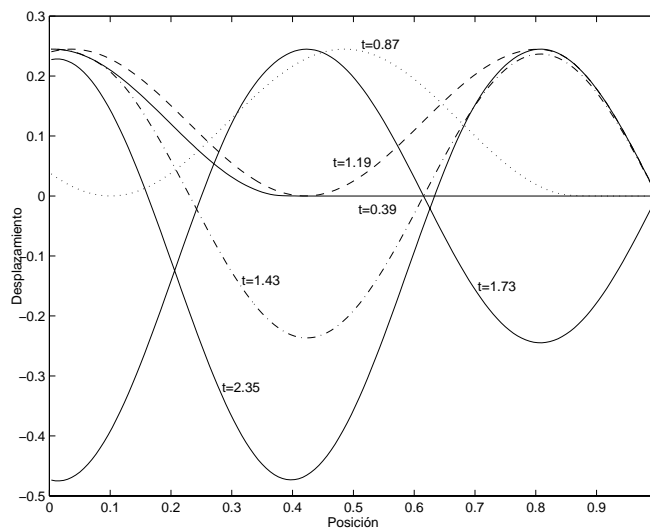


Figura 7.87. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 1.3 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.39$, $t_2=0.87$, $t_3=1.19$, $t_4=1.43$, $t_5=1.73$ y $t_6=2.35$.

En este caso, la mejor detección del defecto se consigue al alcanzar el máximo de desplazamiento por primera vez en el punto $x=0.49$, es decir, en el tiempo t_2 . Con esta señal podemos detectar hasta el defecto de intensidad 0.1%, aunque con algo de ruido de fondo (véase la Figura 7.88). En ese instante la onda todavía no ha alcanzado el

extremo derecho y no se ha producido ninguna reflexión, por lo que presenta una forma sinusoidal suave, lo que favorece la detección del defecto.

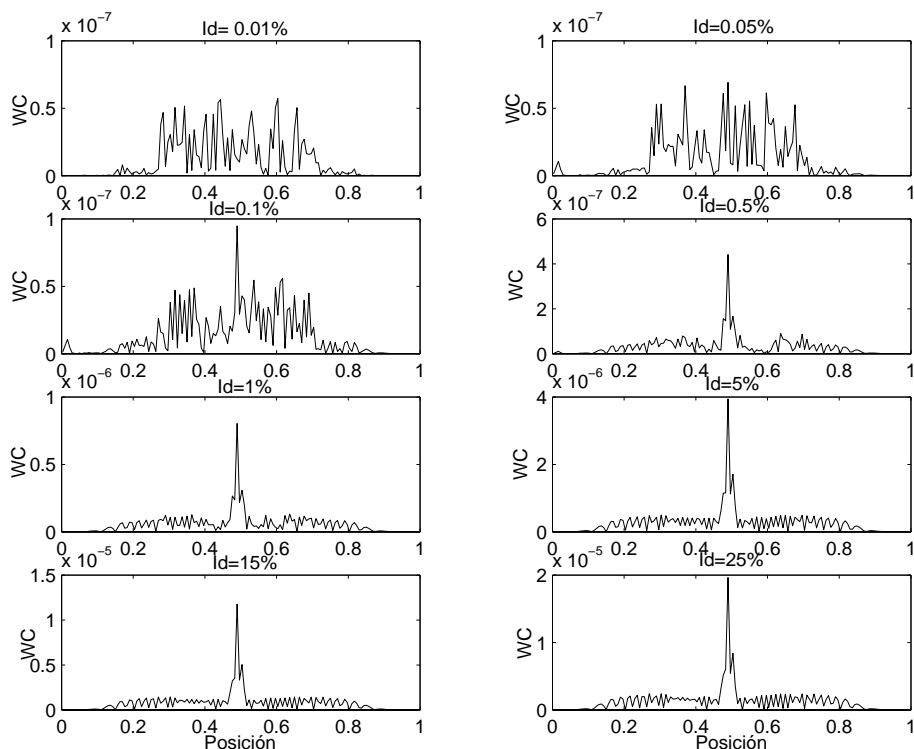


Figura 7.88. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=0.87$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 1.3.

d.- Fuerza senoidal de frecuencia 3.14

Esta fuerza es de alta frecuencia en comparación con la primera frecuencia natural de la barra. Seguimos estudiando los tiempos:

$-t_1=0.16$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_2=0.65$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_3=1.07$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

$-t_4=2.34$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=2.50$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=2.67$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

En este caso en $x=0$ se alcanza el máximo demasiado pronto, sin que la onda haya apenas avanzado por la barra, por lo que no hay apenas vibración (véase la Figura 7.89). De nuevo la mayor capacidad de detección se consigue con el tiempo t_2 , siendo ahora el resultado bastante bueno, ya que se detecta el defecto hasta con una intensidad $I_d=0.01\%$, como se puede apreciar en la Figura 7.90.

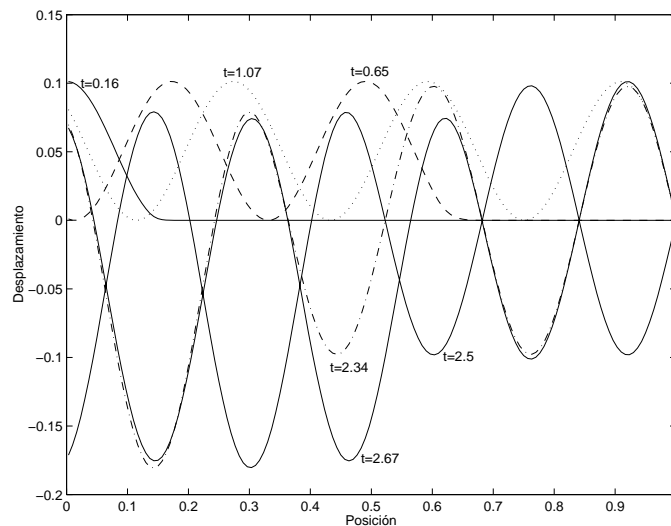


Figura 7.89. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 3.14 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.16$, $t_2=0.65$, $t_3=1.07$, $t_4=2.34$, $t_5=2.50$ y $t_6=2.67$.

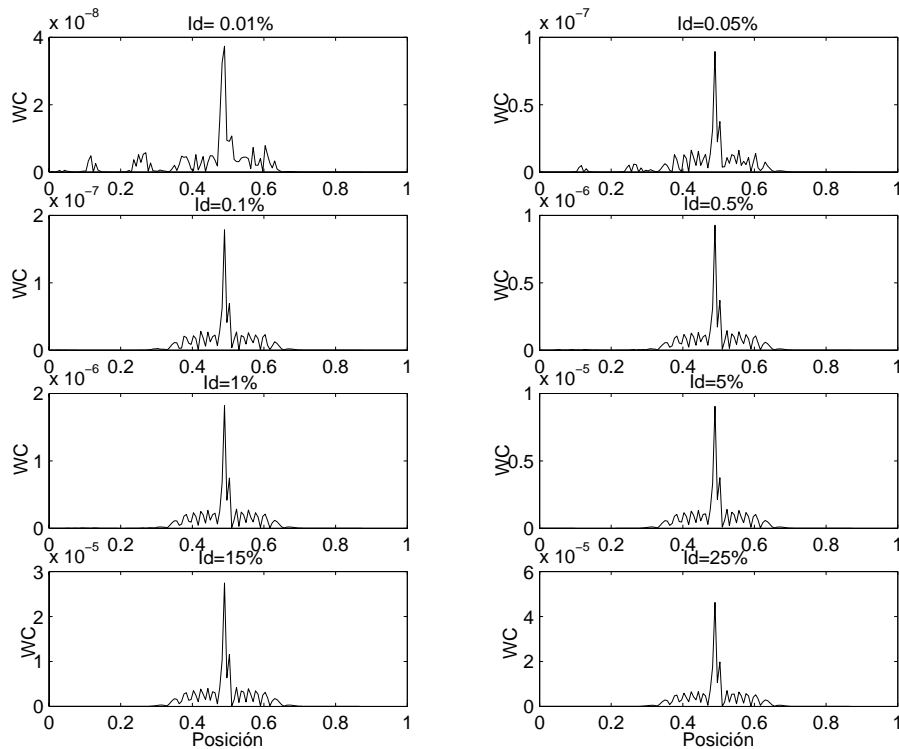


Figura 7.90. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=0.65$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 3.14 .

e.- Fuerza senoidal de frecuencia 4.85

En este caso, los tiempos considerados son:

$-t_1=0.11$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_2=0.59$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_3=1.05$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

$-t_4=1.14$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=1.21$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=1.26$: Tiempo en que el desplazamiento alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

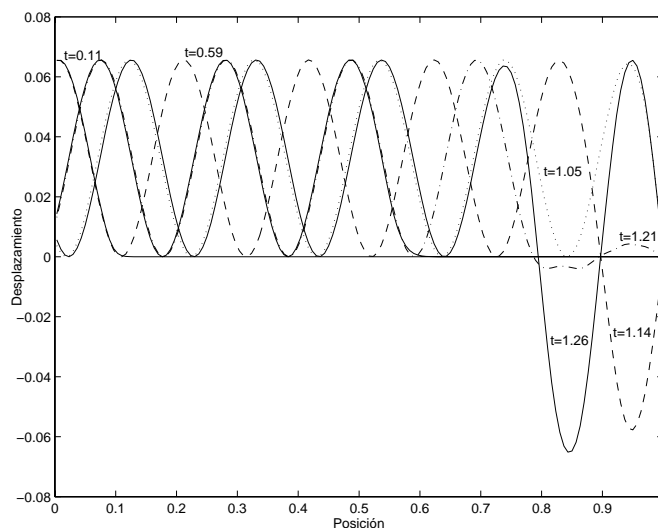


Figura 7.91. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 4.85 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.11$, $t_2=0.59$, $t_3=1.05$, $t_4=1.14$, $t_5=1.21$ y $t_6=1.26$.

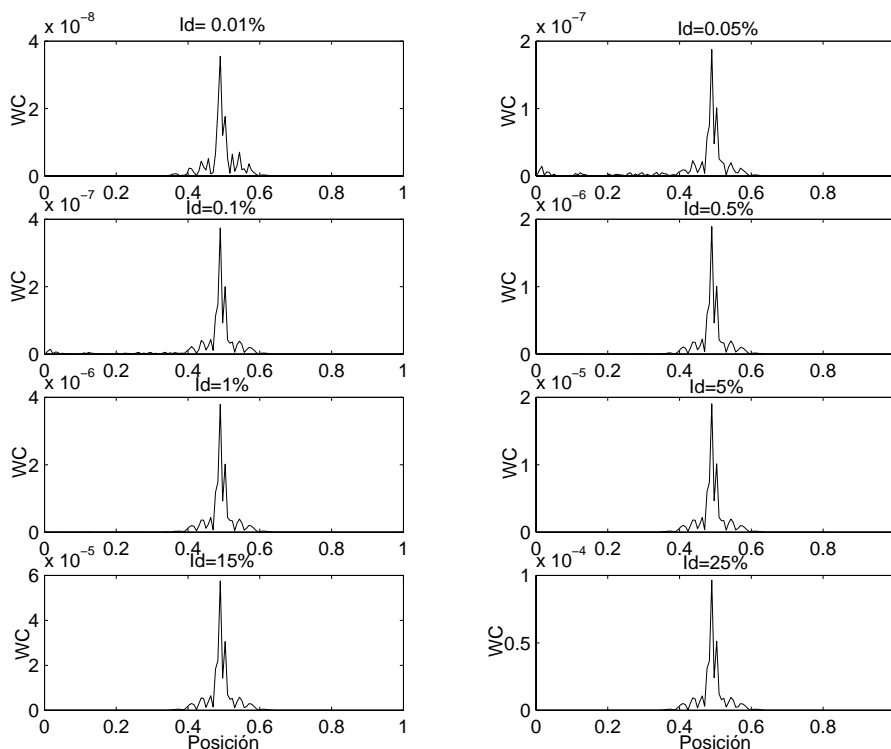


Figura 7.92. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=0.59$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 4.85.

Como se aprecia en la Figura 7.91, la forma espacial de la onda no es nada suave, presentando muchos vientres en los tiempos más avanzados. Los resultados de

esta fuerza de alta frecuencia son también muy buenos (véase la Figura 7.92), ya que detecta y localiza bien hasta el defecto de $Id=0.01\%$, y lo hace para tres de los tiempos, t_2 , t_4 y t_5 .

f.- Comparación entre las distintas fuerzas senoidales

Al estudiar la capacidad de cada una de estas fuerzas senoidales para detectar el defecto mediante las vibraciones forzadas (señales espaciales) hemos podido comprobar que al aumentar la frecuencia, aumenta la capacidad de detección, de forma que con las fuerzas de frecuencias más altas es posible detectar defectos más pequeños. Este comportamiento es muy similar al encontrado al trabajar con los modos propios en las vibraciones libres. En ese caso, en general, habíamos observado que la detección del defecto mejora con el orden del modo. Por otro lado, el hecho de que la mejor detección se lleve a cabo cuando se alcanza el máximo desplazamiento en la posición del defecto, también está en concordancia con lo encontrado para las vibraciones libres. Por tanto, parece que, básicamente, no hay muchas diferencias de comportamiento entre las vibraciones libres y las forzadas senoidales, pudiéndose aplicar los mismos criterios básicos en ambos casos.

En la Figura 7.93 se representa el valor máximo de la función de detección $WC(x,2)$ en función de la intensidad de defecto, para las diferentes fuerzas senoidales aplicadas. Se puede observar que se sigue manteniendo una importante la linealidad, al menos mientras que el defecto se detecta correctamente. Los puntos fuera de la linealidad corresponden a defectos no detectados correctamente, cosa que ocurre a muy bajas intensidades de defecto. Así mismo, vemos que las fuerzas de mayor frecuencia proporcionan una pendiente mayor de la recta, salvo en el caso de 0.7, que es inferior a la de 0.4. La explicación de este hecho puede ser la misma que para explicar lo que ocurría entre el primer y segundo modo propio de las vibraciones libres. De hecho, la frecuencia natural del segundo modo es 0.75. Nótese que la amplitud del desplazamiento cuando la fuerza es de 0.4 en la posición del defecto es mayor que cuando la fuerza es de 0.7: 0.763 frente a 0.455. Por ello, la capacidad en la detección para 0.4 es mayor que para 0.7.

En la Figura 7.94 se representa la localización del máximo de la función $WC(x,2)$ en función de la intensidad de defecto, comparada con la posición real del

defecto. Vemos que para las intensidades que podían ser detectadas con cada fuerza, el defecto se localiza perfectamente. En los casos en los que la detección no ha sido posible, sin embargo, y como es lógico, el máximo de la función $WC(x,2)$ aparece en posiciones distintas y de forma aleatoria, cosa que ocurre a muy bajos valores de Id .

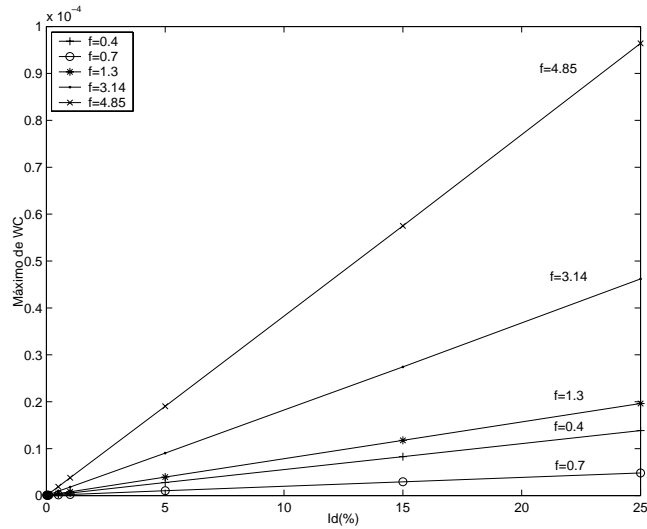


Figura 7.93. Valor máximo de la función $WC(x,2)$ para vibraciones forzadas senoidales de diferente frecuencia, en función de la intensidad del defecto. Las señales de vibración espaciales se han evaluado en el tiempo en que proporcionan mejor detección.

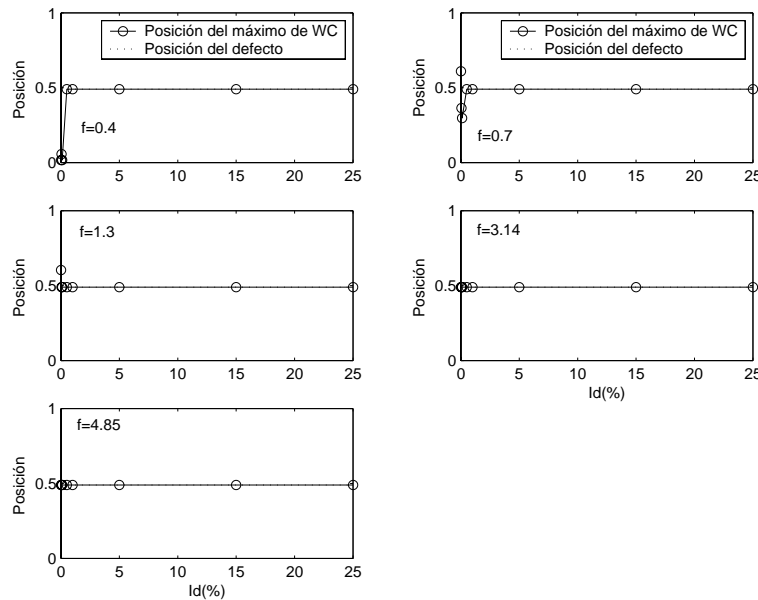


Figura 7.94. Localización del máximo de la función $WC(x,2)$ representada en la Figura 7.93, en función de la intensidad de defecto, comparada con la posición real del defecto, $x_d=0.4767$.

g.- Pulso gaussiano

Este tipo de fuerza produce en la barra cambios bruscos del desplazamiento a medida que el pulso va avanzando y se refleja en los extremos. Los tiempos estudiados en este caso han sido:

- $t_1=0.28$: Antes de atravesar el defecto.
- $t_2=0.55$: Llegada del pulso al defeco.
- $t_3=1.10$: Después de la primera reflexión.
- $t_4=2.38$: Después de la segunda reflexión.
- $t_5=2.71$: Después de la segunda reflexión.
- $t_6=2.80$: Después de la segunda reflexión.

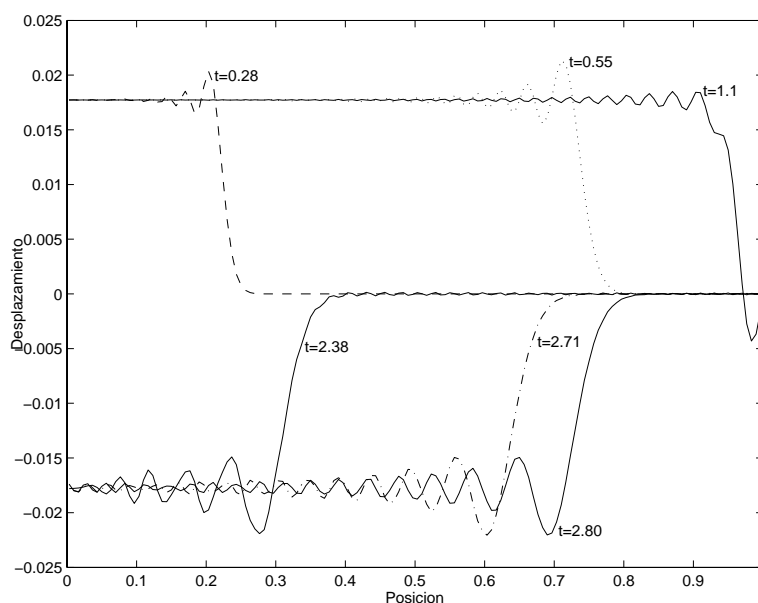


Figura 7.95. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle un pulso gaussiano en el punto $x=0$.
 Tiempos de evaluación: $t_1=0.28$, $t_2=0.55$, $t_3=1.10$, $t_4=2.38$, $t_5=2.71$ y $t_6=2.80$.

En la Figura 7.95 se representa la respuesta vibracional de la barra a estos tiempos. Con este tipo de fuerza se puede detectar el defecto cuando se trabaja con t_2 , que es el tiempo en el que llega el pulso al defeco, mientras que para el resto de los tiempos es imposible detectar el defecto, obteniéndose solo ruido de fondo al hacer la TW (véase la Figura 7.96). Así, parece que la TW es efectiva sólo en el momento en

que el pulso interacciona con el defecto, mientras que para el resto de los tiempos el carácter abrupto de la respuesta que provoca esta excitación en la barra, o los errores de simulación introducidos por el MSR, es decir, el ruido computacional, provocan que no pueda ser detectado el defecto.

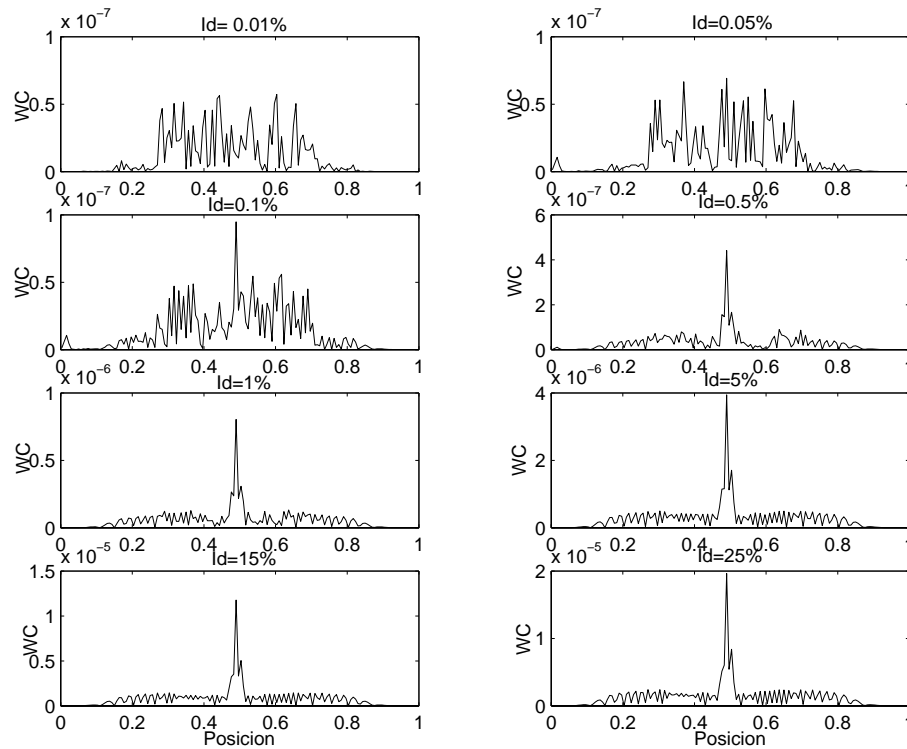


Figura 7.96. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=0.55$. Fuerza tipo pulso gaussiano aplicada en $x=0$.

7.4.1.2.- Defecto tipo rigidez

En este apartado presentamos los resultados para defectos en la rigidez mediante vibraciones forzadas, con las mismas fuerzas e intensidades de defecto que en el apartado anterior. Para cada fuerza hemos buscado qué forma de onda es la más apropiada, es decir, en qué tiempo es mejor medir la onda para detectar el defecto. No obstante, a diferencia del apartado anterior en que estudiábamos los tiempos en los que se alcanzaba el máximo en el desplazamiento en diferentes posiciones, en este caso hemos tenido en cuenta los tiempos en los que se alcanza el máximo en la fuerza en esas mismas posiciones. La razón para este cambio no es otra que, tal y como demostramos

analíticamente en la Sección 7.3.1.3, los defectos en la rigidez tienen una mayor incidencia sobre la fuerza que sobre el desplazamiento.

a.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.4

Hemos estudiado los tiempos:

- $t_1=0.62$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_2=1.11$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_3=1.62$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (extremo derecho de la barra).

La forma de la onda en esos tiempos se puede ver en la Figura 7.97. En cuanto a la detección del defecto, para t_2 no se detecta para ninguna intensidad, mientras que para t_3 se detecta hasta la intensidad $I_r=0.5\%$. Para t_1 la detección es viable hasta la intensidad de $I_r=0.05\%$ (véase la Figura 7.98).

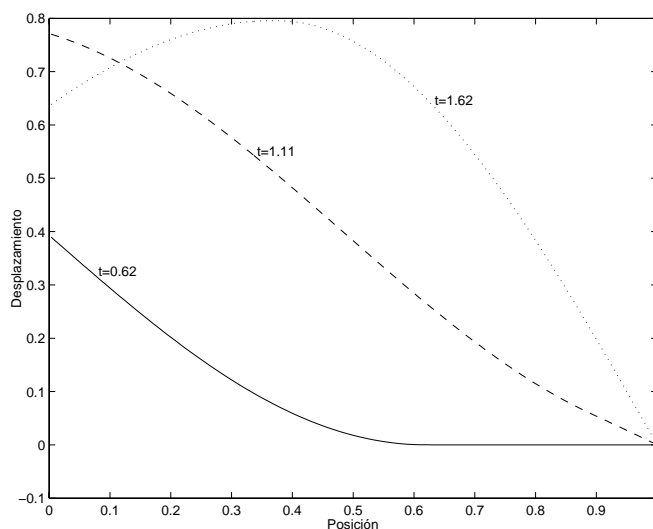


Figura 7.97. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 0.4 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.62$, $t_2=1.11$ y $t_3=1.62$.

b.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.7

Hemos considerado los tiempos:

$-t_1=0.36$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_2=0.84$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_3=1.36$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

$-t_4=1.79$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=2.06$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=2.79$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

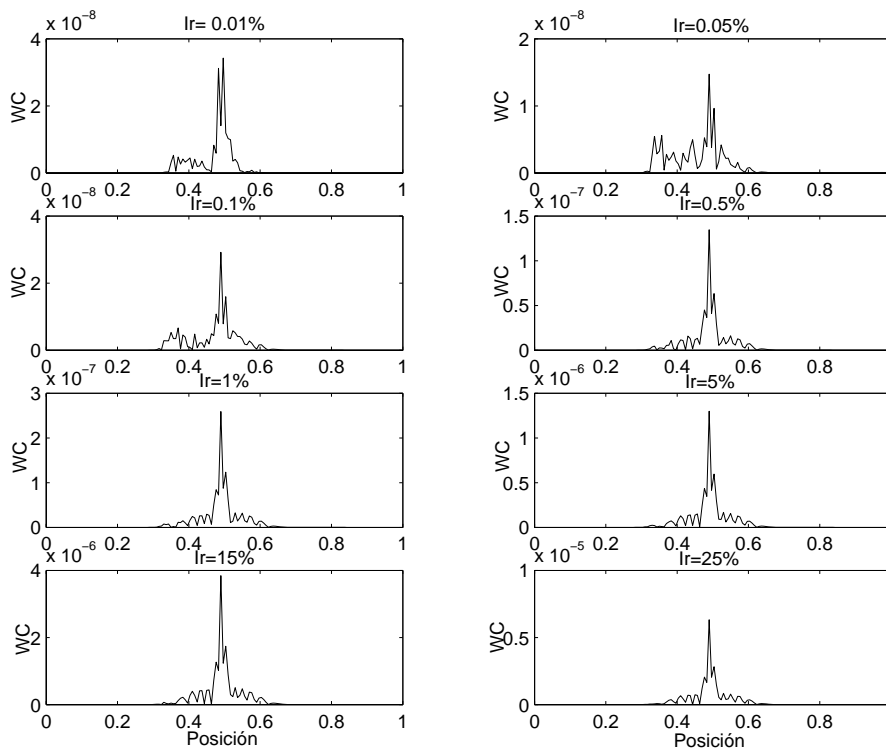


Figura 7.98. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_3=1.62$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 0.4.

Las formas de onda pueden verse en la Figura 7.99. El límite de detección para esta frecuencia sigue siendo $I_r=0.5\%$, alcanzado con todos los tiempos estudiados, salvo con t_1 . La máxima amplitud de los picos se consigue en t_6 (véase la Figura 7.100).

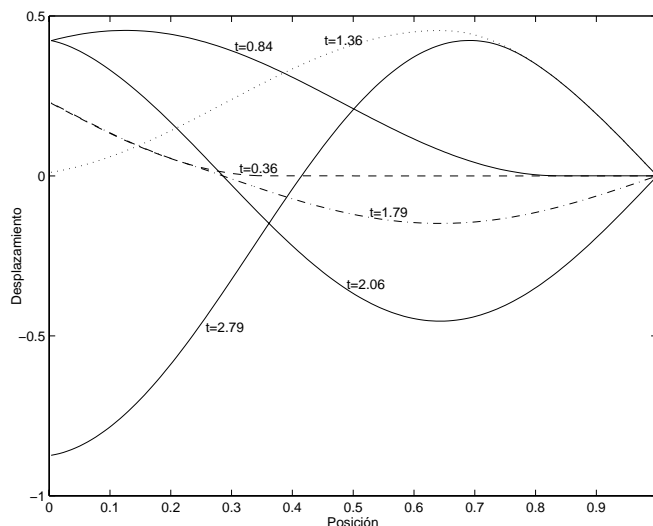


Figura 7.99. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 0.7 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.36$, $t_2=0.84$, $t_3=1.36$, $t_4=1.79$, $t_5=2.06$ y $t_6=2.79$.

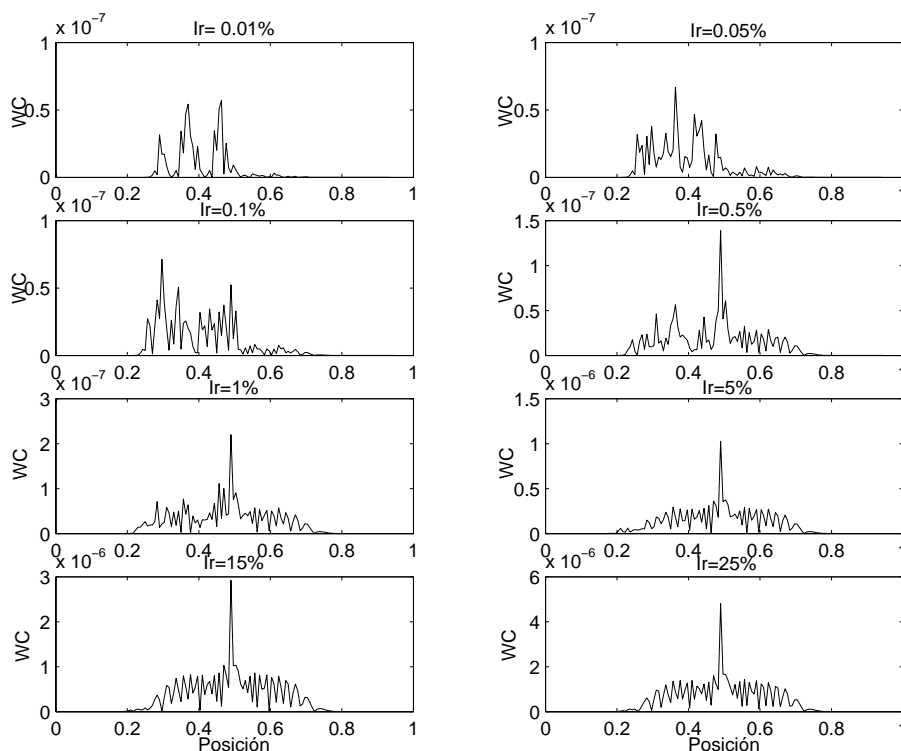


Figura 7.100. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_6=2.79$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 0.7.

c.- Fuerza senoidal de frecuencia 1.3

$-t_1=0.19$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_2=0.69$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_3=1.19$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

$-t_4=1.73$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=1.46$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=1.96$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

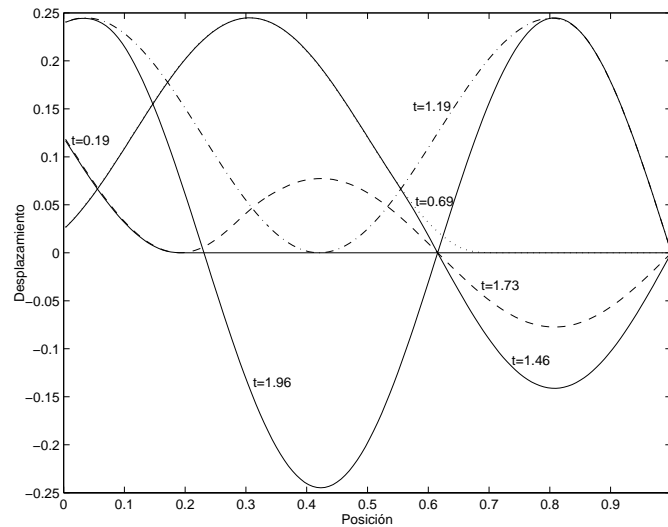


Figura 7.101. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 1.3 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.19$, $t_2=0.69$, $t_3=1.19$, $t_4=1.73$, $t_5=1.46$ y $t_6=1.96$.

Véase la forma de la onda para estos tiempos en la Figura 7.101. Aquí se puede detectar el defecto para todas las intensidades. En t_2 (Figura 7.102) y t_4 se detectan

perfectamente todos los defectos, mientras que en el resto de tiempos se detecta correctamente hasta $I_r=0.05\%$.

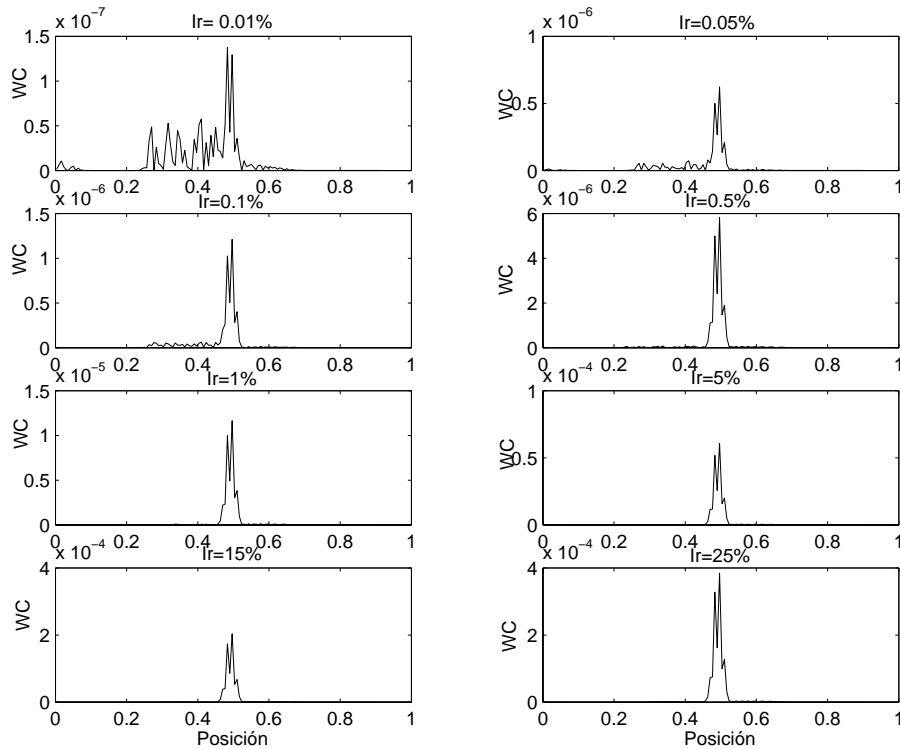


Figura 7.102. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_2=0.69$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 1.3.

d.- Fuerza senoidal de frecuencia 3.14

Los tiempos en este caso son:

- $t_1=0.08$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_2=0.58$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_3=1.07$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

- $t_4=1.35$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

$-t_5=1.56$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

$-t_6=2.35$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

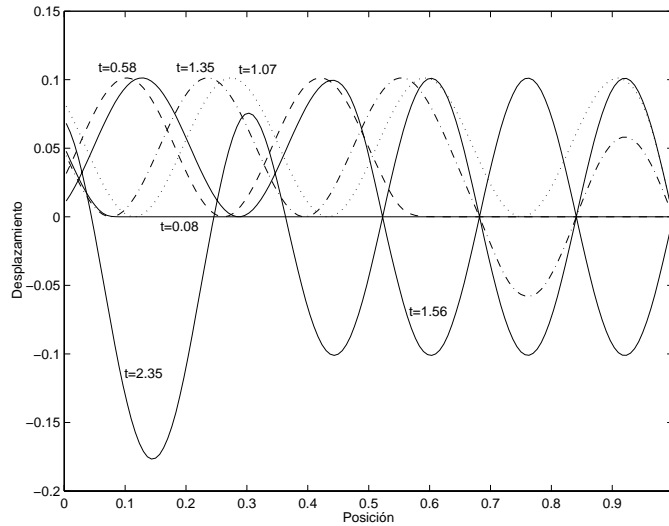


Figura 7.103. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 3.14 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.08$, $t_2=0.58$, $t_3=1.07$, $t_4=1.35$, $t_5=1.56$ y $t_6=2.35$.

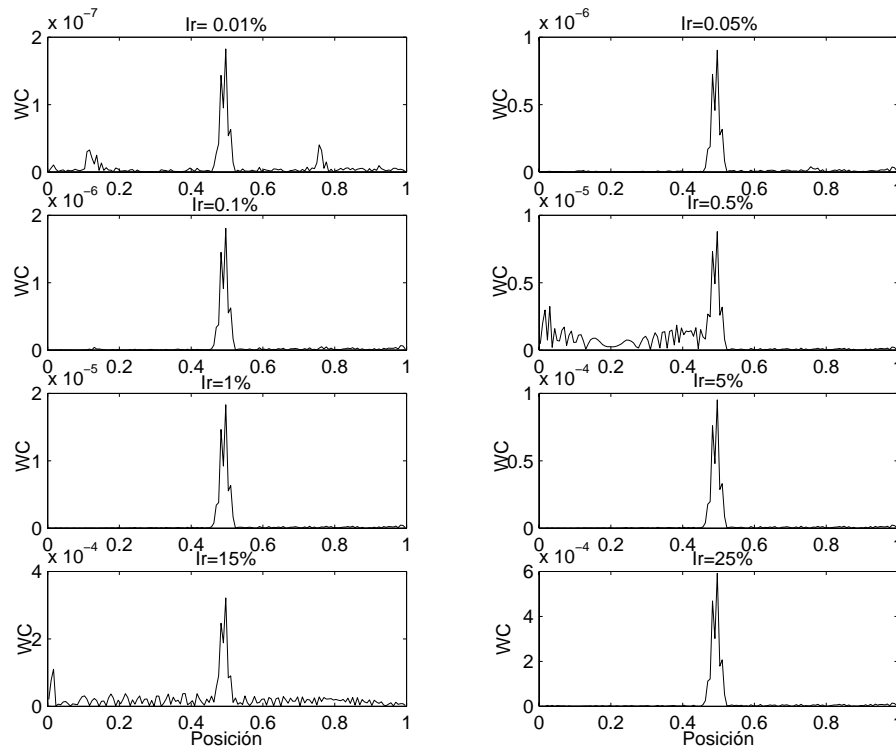


Figura 7.104. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_5=1.56$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 3.14.

El primer tiempo es demasiado corto para poder detectar el defecto, ya que, como podemos observar en la Figura 7.103, la onda apenas se ha propagado por la barra. Para los restantes tiempos, sin embargo, la detección es muy buena. En t_2 , t_3 , t_4 y t_5 la detección es perfecta para todos los defectos, sin que aparezca apenas ruido. En t_6 se detecta solo hasta $I_r=1\%$, apareciendo bastante ruido al disminuir la intensidad. El instante en que mejor se detecta el defecto es t_5 (Figura 7.104), momento en que se alcanza un máximo en la fuerza en la posición del defecto.

e.- Fuerza senoidal de 4.85

Los tiempos estudiados han sido:

- $t_1=0.05$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_2=0.54$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_3=1.06$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por primera vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

- $t_4=2.53$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0$ (el extremo izquierdo de la barra).

- $t_5=2.61$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=0.49$ (muy cerca del defecto).

- $t_6=2.70$: Tiempo en que la fuerza alcanza, por segunda vez, su valor máximo en la posición $x=1$ (el extremo derecho de la barra).

A esta frecuencia en casi todos los instantes estudiados se pueden detectar todos los defectos. Salvo en el primero, t_1 , que por ser demasiado pequeño, la vibración producida está muy localizada en el extremo izquierdo (véase la Figura 7.105), para el resto de tiempos se detecta la presencia del defecto para todas las intensidades. No obstante, la mejor detección se produce cuando se alcanza un máximo en la fuerza cerca de la posición del defecto, en $t_5=2.61$ (Figura 7.106).

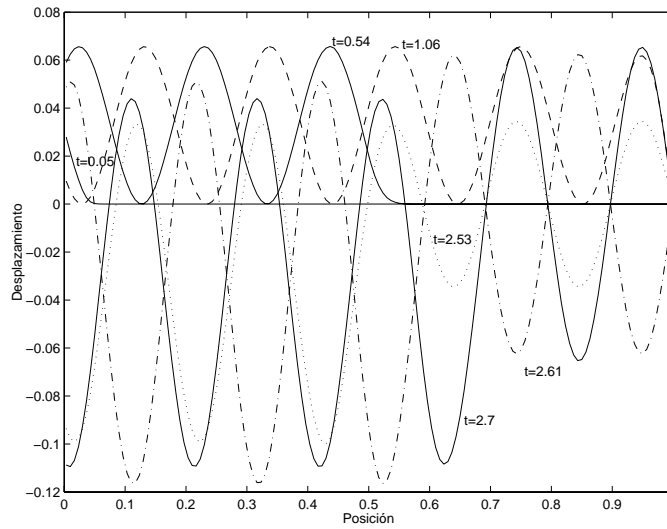


Figura 7.105. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle una fuerza senoidal de frecuencia 4.85 en el punto $x=0$. Tiempos de evaluación: $t_1=0.05$, $t_2=0.54$, $t_3=1.06$, $t_4=2.53$, $t_5=2.61$ y $t_6=2.70$.

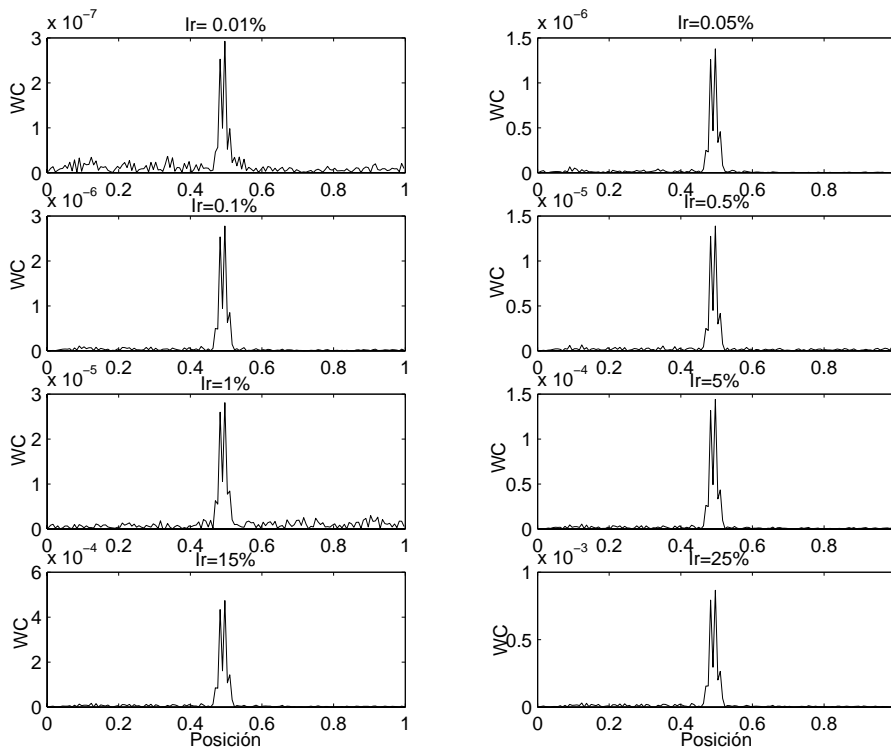


Figura 7.106. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_5=2.61$. Fuerza senoidal aplicada en $x=0$ de frecuencia 4.85 .

f.- Comparación de entre las distintas fuerzas senoidales

Al estudiar los resultados obtenidos con cada frecuencia y compararlos entre sí, vemos que la situación es algo más compleja que cuando el defecto está en la densidad.

Al igual que ocurría al trabajar con vibraciones libres, la capacidad de detección del defecto es mayor para defectos en la rigidez que para defectos en la densidad. Parece, por tanto, indudable que un defecto en la rigidez afecta más a las vibraciones longitudinales que uno en la densidad. Al aumentar la frecuencia, aumenta la capacidad de detección de la técnica, siendo posible la detección del defecto en la mayoría de los tiempos e intensidades de defecto estudiadas. Hemos visto que, a diferencia de lo que ocurre con el defecto en la densidad, ahora no hay un tipo de instante de tiempo único en el que sea mejor detectar el defecto. No obstante, en general, la detección es mejor cuando se alcanza un máximo en la fuerza en la posición del defecto.

De manera similar a las vibraciones libres, con las forzadas aparecen dos picos en la función de detección WC muy próximos entre sí, en lugar de uno solo. No obstante, el pico más alto corresponde a la posición del defecto.

Al estudiar la relación entre el valor del máximo de la función $WC(x,2)$ y la intensidad de defecto (Figura 7.107) vemos que no se mantiene la linealidad al pasar de la intensidad de defecto $I_r=15\%$ a $I_r=25\%$, salvo al trabajar con la fuerza senoidal de frecuencia 0.4, lo que supone un cierto inconveniente a la hora de cuantificar la intensidad del defecto (Nivel 3).

En cuanto al comportamiento de cada frecuencia, vemos que vuelve a cumplirse el hecho de que a mayor frecuencia de la vibración forzada senoidal, mayor amplitud de los picos de la función $WC(x,2)$ y, por tanto, mayor capacidad de detección. La excepción se presenta para la fuerza de 0.7, cuyos picos de la función $WC(x,2)$ tienen una amplitud mayor que para el resto de fuerzas, salvo la de 4.85, justo al contrario de lo que ocurre para el defecto tipo densidad. Como ya hemos indicado, la proximidad de esta frecuencia a la segunda frecuencia natural de la barra (0.75) hace que su comportamiento sea similar a ella y tengamos un vientre de la fuerza cerca de la posición del defecto, aumentando la perturbación que este produce, y por tanto, la capacidad de detección.

En la Figura 7.108 podemos ver que la localización del defecto es posible en todos los casos, salvo en los de intensidades muy bajas, como 0.01% para las fuerzas de 0.4 y 0.7. El pequeño error que algunas veces aparece se debe a la presencia de dos picos muy próximos en lugar de uno.

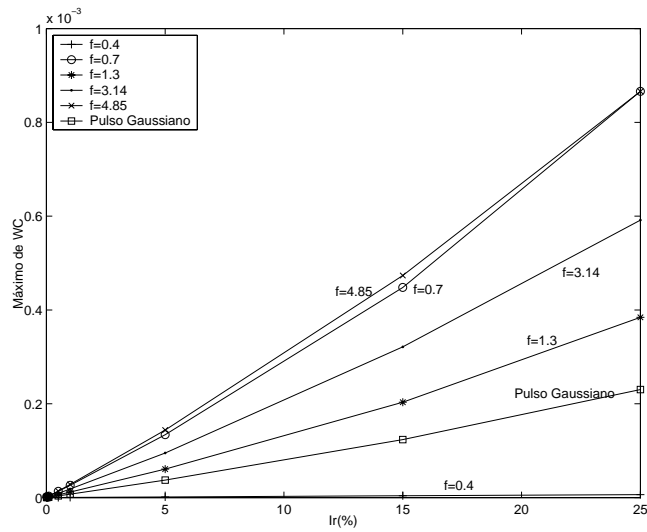


Figura 7.107. Valor máximo de la función $WC(x,2)$ para vibraciones forzadas senoidales de diferente frecuencia, en función de la intensidad del defecto (tipo rigidez). Las señales de vibración espaciales se han evaluado en el tiempo en que proporcionan mejor detección.

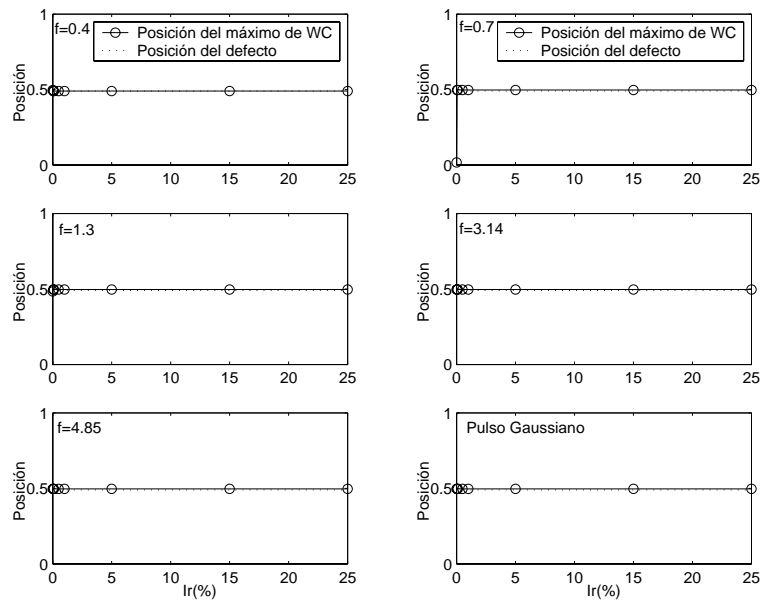


Figura 7.108. Localización del máximo de la función $WC(x,2)$ representada en la Figura 7.107, en función de la intensidad de defecto, comparada con la posición real del defecto, $x_d=0.4767$.

g.- Pulso gaussiano

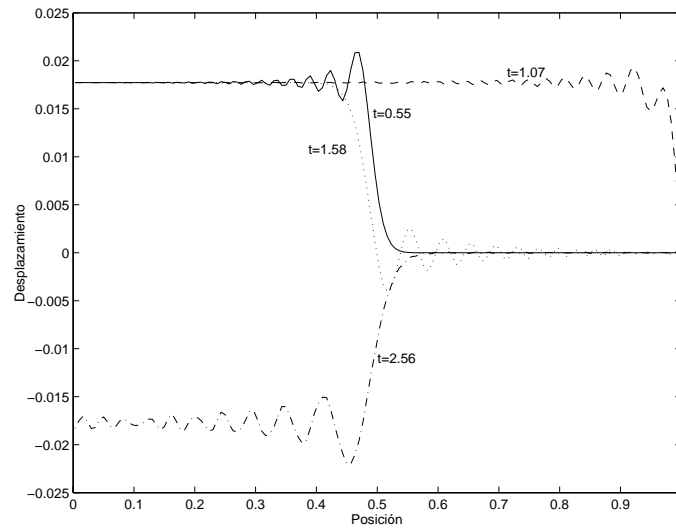


Figura 7.109. Desplazamiento de la barra sin defecto al aplicarle un pulso gaussiano en el punto $x=0$.
 Tiempos de evaluación: $t_1=0.55$, $t_2=1.07$, $t_3=1.58$ y $t_4=2.56$.

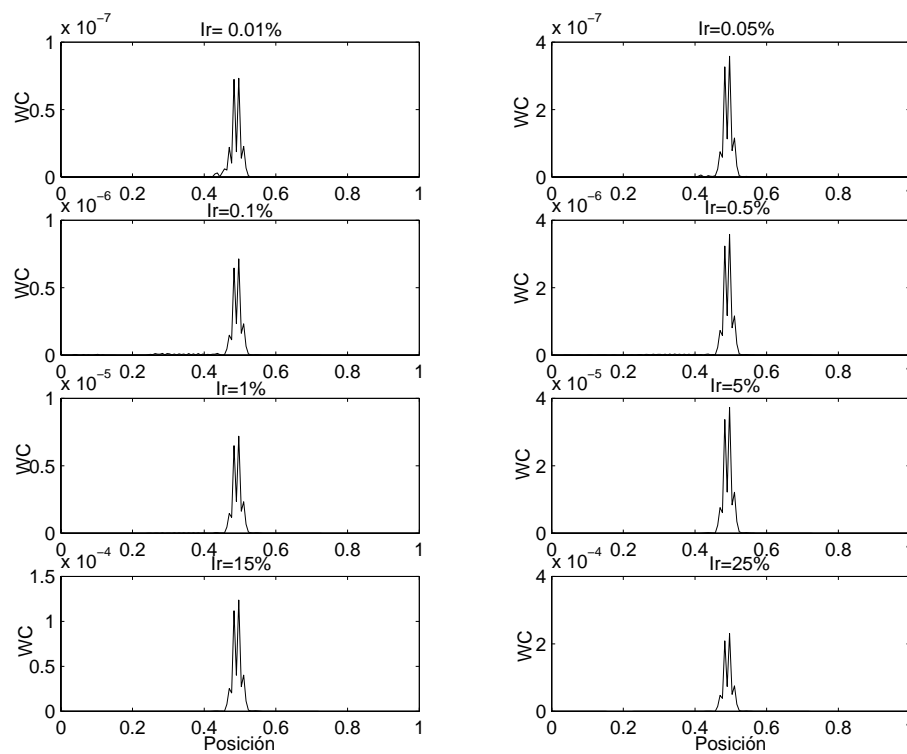


Figura 7.110. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto en la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_1=0.55$. Fuerza tipo pulso gaussiano aplicada en $x=0$

- $t_1=0.55$: Cuando el pulso llega por primera vez al defecto.

$-t_2=1.07$: Cuando el pulso alcanza por segunda vez el extremo derecho.

$-t_3=1.58$: Cuando el pulso llega por segunda vez al defecto.

$-t_4=2.56$: Cuando el pulso alcanza por segunda vez el extremo derecho

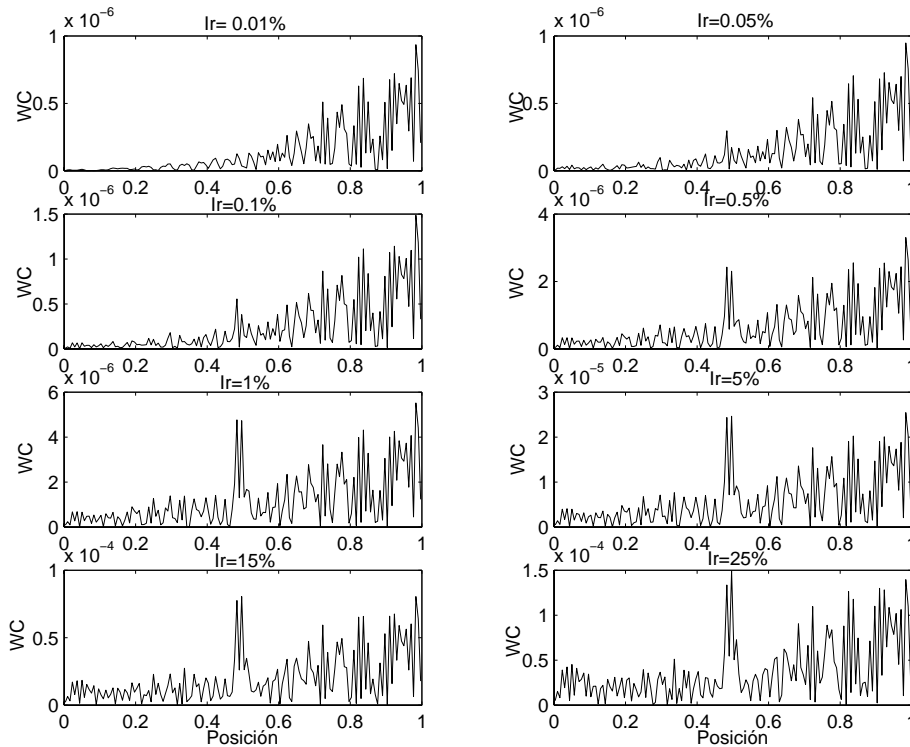


Figura 7.111. $WC(x,2)$ del desplazamiento de la barra con un defecto la posición $x_d=0.4767$, para el tiempo $t_3=1.58$. Fuerza tipo pulso gaussiano aplicada en $x=0$.

Ahora encontramos dos fenómenos interesantes que, en cierto modo, permiten la detección del defecto. Por un lado encontramos que al llegar el pulso al defecto, lo detectamos para todas las intensidades, tal y como puede verse en la Figura 7.110. Por otro lado, en t_3 y t_4 aparecen picos en la posición del defecto que indudablemente indican su presencia y posición, aunque con muchos otros picos parásitos a su derecha, que incluso llegan a ser más altos, aunque con distinta “aparición” (véase la Figura 7.111). En ambos tiempos, puede llegar a detectarse hasta el defecto de intensidad $Ir=0.5\%$.

7.4.2.- Con señales temporales

La detección del defecto mediante señales temporales de vibraciones forzadas es parecida a las vibraciones libres (Sección 7.3.2). No se basa, como al trabajar con

señales espaciales, en detectar un pico justo en la posición que marca la presencia del defecto, sino en encontrar las oscilaciones que marcan el instante temporal en que una señal procedente del defecto llega al punto de observación, y que nos sirve para conocer la distancia entre el defecto y dicho punto. Sin embargo, como se verá a continuación, aparecen algunas diferencias entre la forma de detectar el defecto con vibraciones forzadas y libres, inherentes a la forma de generar las vibraciones.

El estudio lo llevaremos a cabo con las mismas fuerzas que en la sección anterior: una senoidal de frecuencia $f_a=0.4, 0.7, 1.3, 3.14$ y 4.85 , y un pulso gaussiano. Así mismo, las intensidades de defecto consideradas, tanto en el caso de defecto en la densidad como en la rigidez, serán también las mismas que en la sección anterior: $0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 15$ y 25% . Llamaremos $W_f^d(t,j)$ a la TW de la respuesta temporal de la barra con defecto, realizada a escala j , al aplicarle la fuerza ($f_a \equiv 0.4, 0.7, 1.3 \dots$, para indicar fuerza senoidal a dicha frecuencia o $f_a \equiv g$ para indicar pulso gaussiano).

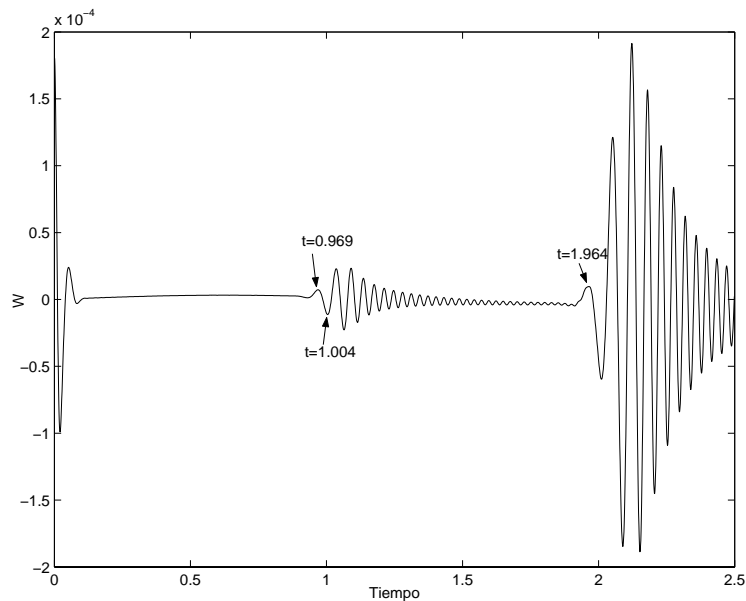


Figura 7.112. $W_{0.4}^d(t,27)$ en $x_0=0.0033$. Barra con $Id=25\%$.

La Figura 7.112 muestra $W_{0.4}^d(t,27)$ para el punto de observación $x_0=0.0033$, en la que se ve que aparecen tres grupos de oscilaciones: uno muy corto al principio, otro para $t \approx 1$, y un último grupo que comienza en $t=1.94$. Cuando se estudió anteriormente, la detección mediante señales temporales de vibraciones libres, se descubrió que se producía una perturbación en el defecto que se transmitía a lo largo de la barra. En este caso, vemos que esto no es así, ya que al trabajar con vibraciones forzadas, toda la barra

no vibra desde el principio de una forma homogénea como en el caso de las vibraciones libres, sino que lo hace conforme la onda generada por la fuerza aplicada se va propagando por la barra. Por tanto, el primer grupo de oscilaciones que se produce en $t \cong 0$ se debe al paso de la onda recién creada por la fuerza aplicada. La llegada de la onda al defecto produce que, dada la diferencia de densidad o rigidez, parte de ella se refleje, y parte se transmita. Teniendo en cuenta los bajos valores en los cambios de densidad o rigidez que estamos considerando, esta reflexión no es apreciable a simple vista (ver Figura 7.113). Sin embargo en la transformada $W_{0.4}^d(t,27)$ sí se aprecia, produciendo el grupo de oscilaciones que aparece en torno a $t \cong 1$. El tercer grupo de vibraciones corresponde a la llegada de la onda (la provocada por la aplicación de la fuerza) después de su reflexión en $x=1$, lo que explica su mayor amplitud.

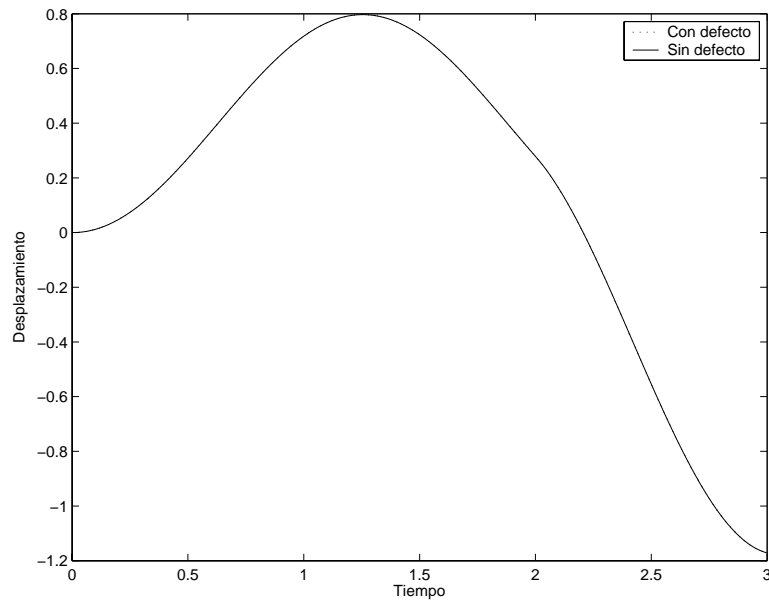


Figura 7.113. Comparación del desplazamiento obtenido en $x_0=0.0033$ al aplicar una fuerza senoidal de frecuencia 0.4 a una barra sin defecto (línea continua) y a una barra con $Id=25\%$ (línea discontinua).

La Figura 7.114, que representa $W_{0.4}^d(t,27)$ para el punto de observación $x_0=0.13$, muestra una situación más compleja. En esa posición aparecen cuatro grupos de oscilaciones, con el segundo y tercer grupo muy cercanos entre sí y con el primero y el último con una amplitud mucho mayor que los otros. Dados los tiempos a los que aparecen el primer y último grupo ($t=0.123$ y $t=1.88$), el primero corresponde al paso de la onda incidente por x_0 mientras que el último se debe al paso de dicha onda tras su reflexión en el extremo derecho de la barra. Al igual que en la Figura 7.112, el segundo

grupo de oscilaciones ($t=0.84$) es debido a la reflexión en el defecto de parte de la onda incidente, que denominaremos “perturbación”, para seguir con la misma nomenclatura que en la Sección 7.3.2. Esta perturbación se refleja en $x=0$ y vuelve a pasar por x_0 , originando el tercer grupo de oscilaciones ($t=1.125$). En $x_0=0.0033$, se superpone el primer paso de la perturbación con la reflexión de la misma, por lo que en la Figura 7.112 no es posible apreciar el paso de la perturbación reflejada.

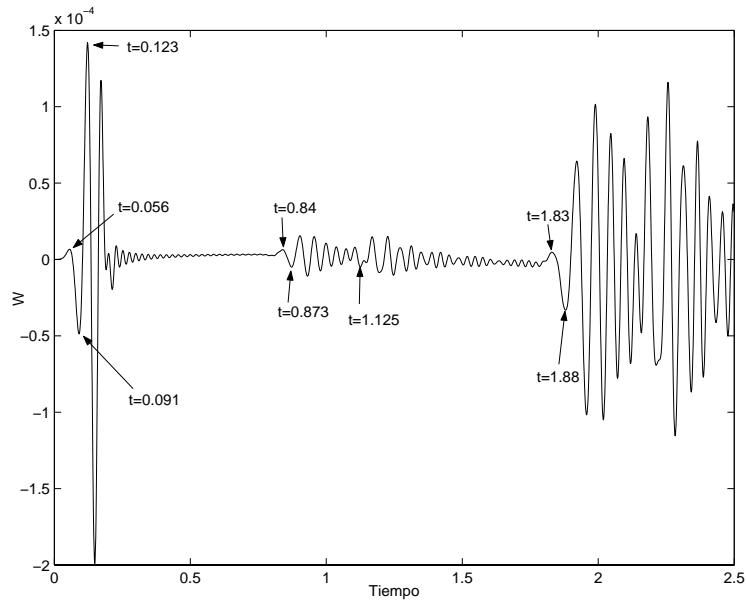


Figura 7.114. $W_{0.4}^d(t,27)$ en $x_0=0.13$. Barra con $Id=25\%$.

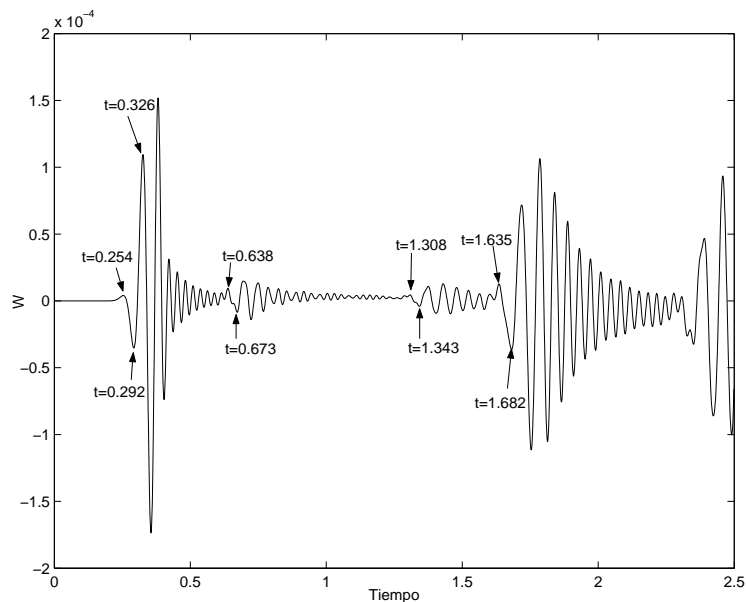


Figura 7.115. $W_{0.4}^d(t,27)$ en $x_0=0.33$. Barra con $Id=25\%$.

En la Figura 7.115 se muestra $W_{0,4}^d(t,27)$ en $x_0=0.33$, apreciándose que ahora el segundo y tercer grupo de oscilaciones ($t=0.638$ y $t=1.308$) están más separados que en la Figura 7.114, dado que la distancia entre punto de observación y $x=0$ es ahora mucho mayor.

Concluyendo, vemos que es posible detectar el defecto mediante la localización de grupos de oscilaciones que no corresponden a ningún paso de la onda incidente. La localización del defecto es algo más complicada que cuando se trabaja con vibraciones libres, ya que en este caso al tiempo de llegada de la perturbación a x_0 hay que restar el tiempo que tarda la onda incidente en llegar al defecto, que en principio es desconocido, para así calcular la distancia entre el punto de observación y el defecto. Es posible obtener la posición del defecto mediante la expresión:

$$x_d = \frac{ct + x_0}{2}$$

(7.16)

donde x_d es la posición del defecto, c la velocidad de la onda longitudinal en la barra y t el tiempo que tarda en llegar la perturbación a x_0 .

Sin embargo, cuando el defecto se encuentra entre $x=0$ y x_0 , la situación no es la misma, ya que la reflexión de la onda incidente en el defecto no va a llegar a x_0 . En este caso, la onda provocada por la fuerza aplicada se refleja en $x=1$, pasa de nuevo por el defecto, y la reflexión que se produce en este nuevo paso, que se desplazará hacia la derecha, es la “perturbación” que se detectará en x_0 . En la Figura 7.116 se muestra un esquema de la propagación de la onda y su detección cuando x_0 se encuentra entre $x=0$ y el defecto, y cuando se encuentra entre el defecto y $x=1$.

En la Figura 7.117 graficamos $W_{0,4}^d(t,27)$ para $x_0=0.8$, donde aparecen dos grupos de oscilaciones de gran amplitud, que marcan el paso de la onda incidente antes y después de su reflexión en $x=1$ ($t=0.798$ y $t=1.213$), y un tercer grupo de oscilaciones ($t=1.82$) que indica la llegada de la perturbación procedente del defecto después del paso de la onda principal.

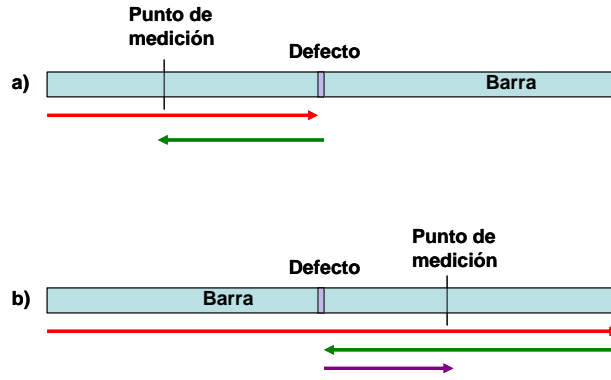


Figura 7.116. a) Esquema de la propagación de la onda incidente provocada por la aplicación de la fuerza en $x=0$, reflexión de parte de ella en el defecto y su detección en el punto de observación (x_0) cuando este se encuentra entre $x=0$ y el defecto. **b)** Esquema de la propagación de la onda incidente, su reflexión en $x=1$, reflexión de parte de ella en el defecto y su detección en el punto de observación (x_0) cuando este se encuentra entre el defecto y $x=1$.

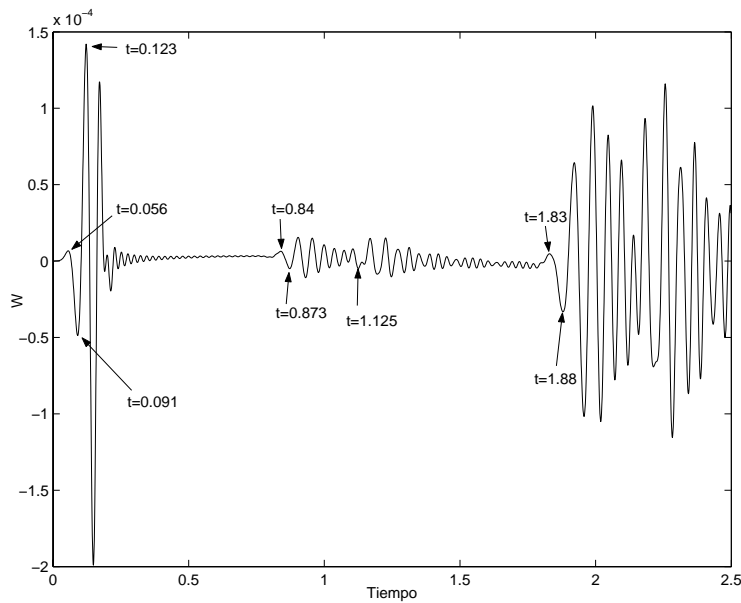


Figura 7.117: $W_{0,4}^d(t,27)$ en $x_0=0.8$. Barra con $Id=25\%$.

Al igual que hicimos en la Sección 7.3.2, para realizar el estudio de la detección y cuantificación del defecto con cada tipo de fuerza trabajaremos con una posición arbitraria $x_0=0.13$. Utilizaremos como parámetro para la cuantificación de la intensidad del defecto el valor absoluto de la diferencia de amplitud entre el primer mínimo y máximo que indican el paso de la perturbación por x_0 , parámetro que anteriormente habíamos definido como AD .

En cuanto a la escala, se puede trabajar a partir de 20, siendo posible la detección de los defectos de mayor intensidad. En los ejemplos mostrados hasta ahora en esta sección se ha utilizado escala 27 porque era la que permitía obtener las figuras de mayor claridad para $Id=25\%$. Sin embargo, al trabajar con cada fuerza se ha buscado la escala que proporciona la mejor detección para todas las intensidades de defecto. En general, parece que la escala 40 es la que mejores resultados proporciona en cuanto a la sensibilidad de la detección.

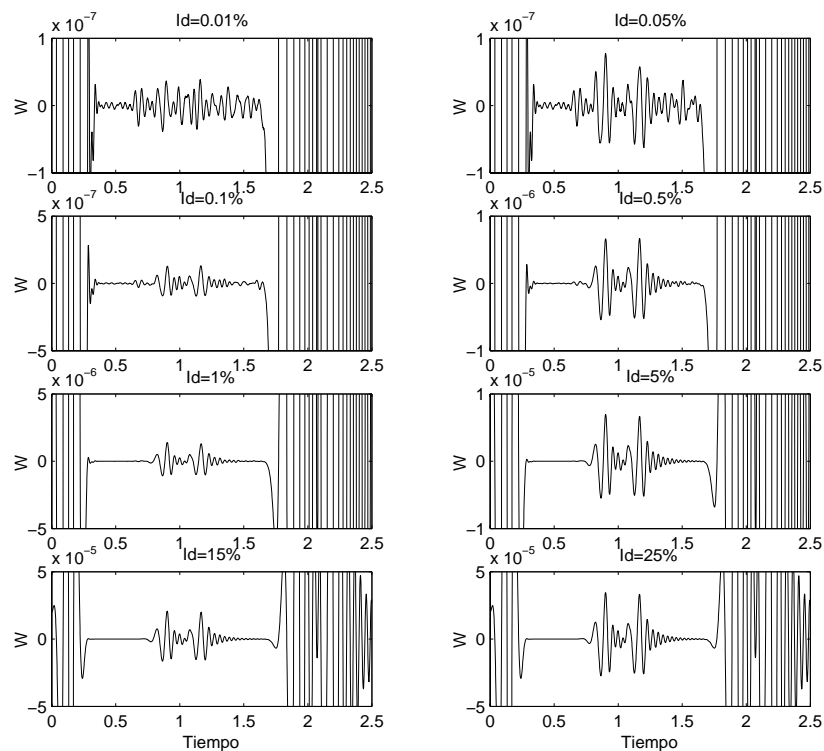


Figura 7.118. $W_{0.4}^d(t,40)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

7.4.2.1.- Defecto tipo densidad

a.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.4

Como sabemos, la detección del defecto se realiza mediante la comprobación de la existencia de un grupo de oscilaciones en la TW que no corresponde al paso de la onda provocada por la fuerza aplicada. Para Id altos estas oscilaciones serán visibles, sin embargo, dada la gran amplitud de las oscilaciones correspondientes al paso de la onda incidente, para Id bajos la perturbación no será apreciable a no ser que se disminuya la escala de ordenadas. En la Figura 7.118 se muestra $W_{0.4}^d(t,40)$ en $x_0=0.13$ para las ocho intensidades de defecto consideradas, cada una con su cambio de escala correspondiente

en el eje de ordenadas. Se observa que hasta $Id=0.1\%$ la presencia de la perturbación correspondiente al defecto es clara, mientras que para $Id=0.05\%$ se puede llegar a intuir, aunque se confunde bastante con el ruido de fondo y no se podría decir con claridad que la barra tiene un defecto.

En cuanto a la cuantificación del defecto, se puede observar en la Figura 7.119, que, al igual que ocurría para vibraciones libres, el parámetro AD es lineal respecto Id para todas las intensidades de defecto, incluso en el caso de tener valores pequeños.

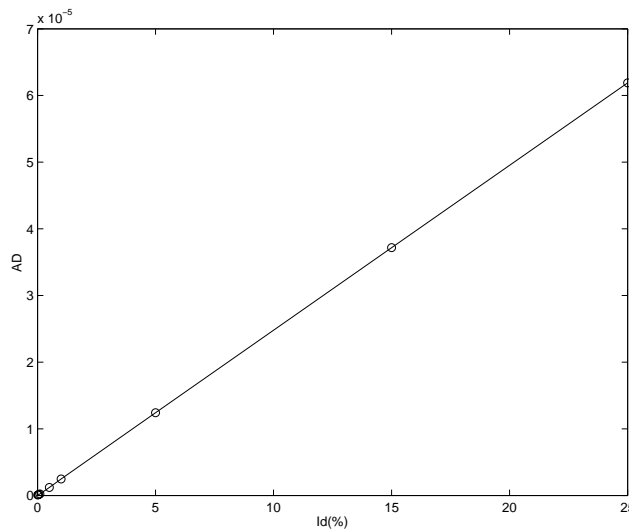


Figura 7.119. Variación de AD con Id para $W_{0.4}^d(t,40)$.

b.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.7

Esta fuerza proporciona mejores resultados que la anterior, ya que es posible la detección hasta $Id=0.05\%$ sin ninguna complicación (véase la Figura 7.120). La variación de AD con Id sigue siendo lineal, como se puede comprobar en la Figura 7.121.

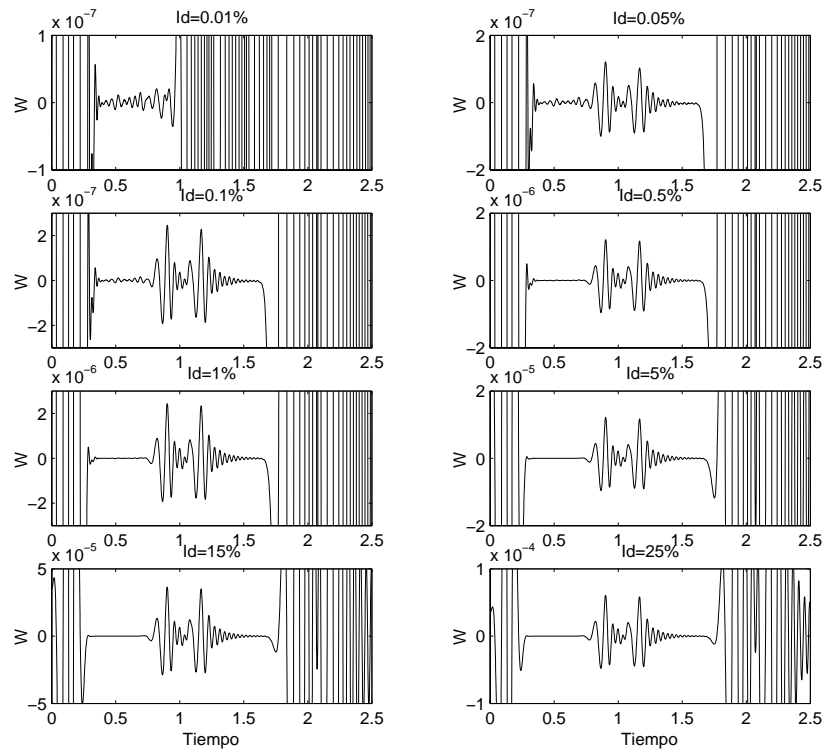


Figura 7.120. $W_{0.7}^d(t,40)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

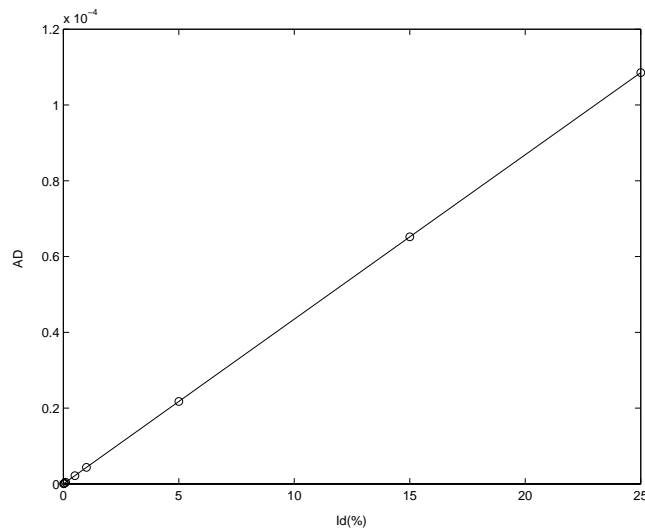


Figura 7.121. Variación de AD con Id para $W_{0.7}^d(t,40)$.

c.- Fuerza senoidal de frecuencia 1.3

Al trabajar con esta fuerza aparece una curvatura en $W_{1.3}^d(t,40)$ para la zona de menor amplitud, la cual es inapreciable al trabajar con intensidades de defecto altas, pero que para $Id < 0.5\%$ se hace patente (ver Figura 7.122). Hasta $Id=0.05\%$ la detección

es perfecta, mientras que para $Id=0.01\%$ se ven unos pequeños picos en los tiempos correspondientes a la perturbación que nos hacen dudar sobre si también es posible la detección para esa Id , pero su baja amplitud y la curvatura de $W_{1,3}^d(t,40)$, que los enmascara ligeramente, hacen muy difícil la detección del defecto. La variación de AD con Id para $W_{1,3}^d(t,40)$ se muestra en la Figura 7.123. La linealidad es muy alta.

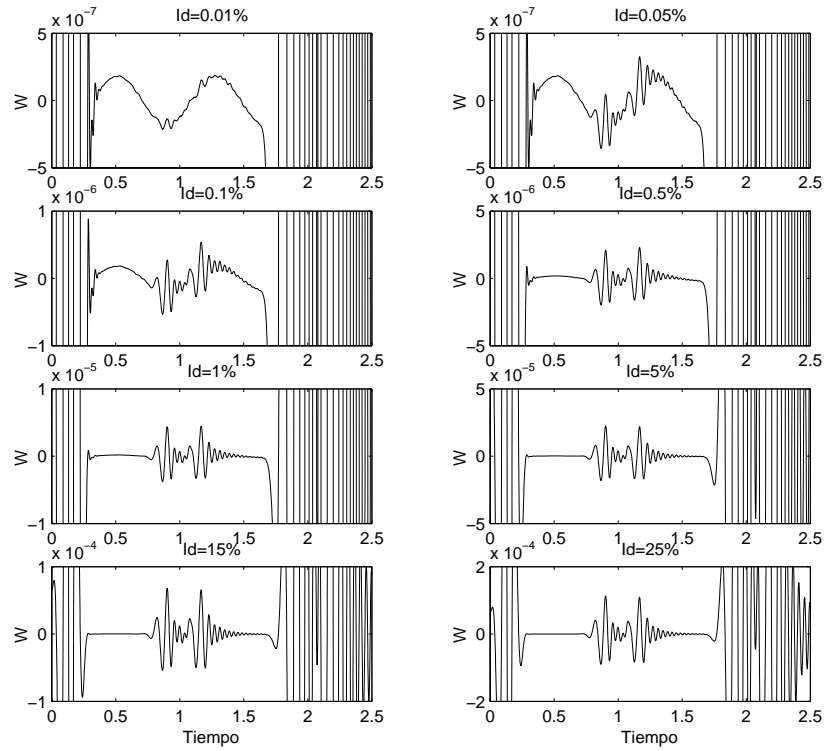


Figura 7.122. $W_{1,3}^d(t,40)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

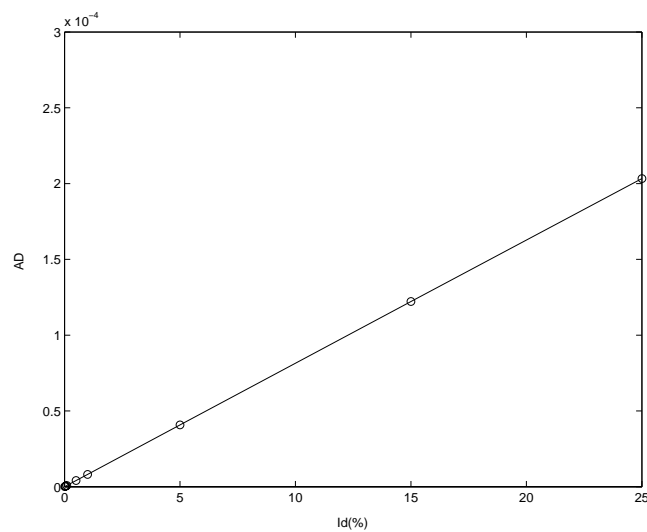


Figura 7.123. Variación de AD con Id para $W_{1,3}^d(t,40)$.

d.- Fuerza senoidal de frecuencia 3.14

La ondulación que aparece para amplitudes muy bajas se acentúa, haciendo más difícil la detección a intensidad bajas. A diferencia de las tres fuerzas anteriores, ahora se obtienen mejores resultados con escala 31, pues disminuye un poco esa ondulación, permitiendo una detección más clara. En la Figura 7.124, el defecto se detecta hasta $Id=0.5\%$. AD sigue siendo lineal para todas las intensidades (véase la Figura 7.125).

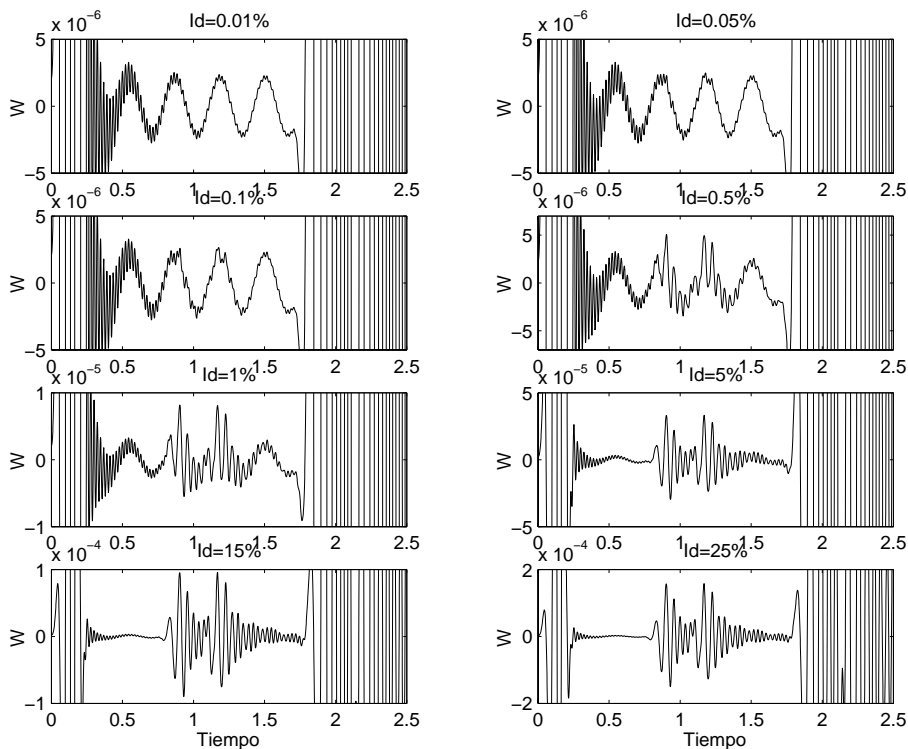


Figura 7.124. $W_{3.14}^d(t,31)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

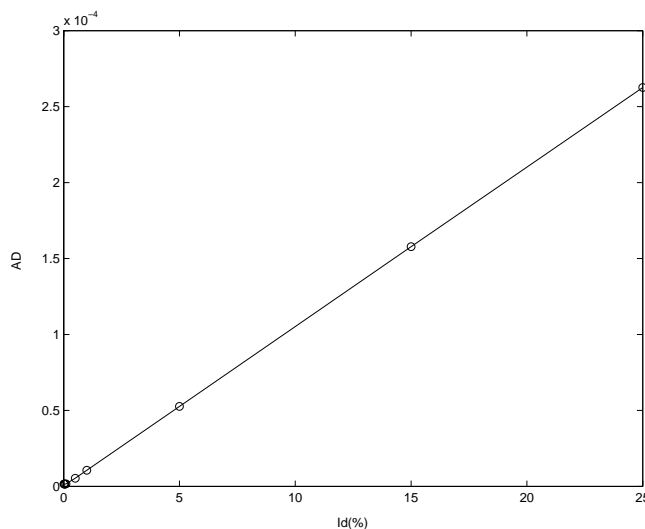


Figura 7.125. Variación de AD con Id para $W_{3.14}^d(t,31)$.

e.- Fuerza senoidal de frecuencia 4.85

Esta fuerza es la que peores resultados proporciona para Id bajas. La ondulación general de la TW es muy marcada y enmascara el paso de la perturbación. Hemos trabajado con escala 23, pues para escalas mayores el defecto con $Id=5\%$ es indetectable. El operar con una escala menor, se produce un aumento de la frecuencia de las oscilaciones, que hace más confusa la apreciación del paso de la perturbación. Figura 7.126 se ve que solo se detecta hasta $Id=5\%$, y que para $Id=1\%$ es casi imposible distinguir el paso de la perturbación. Esto produce que, como es lógico, AD solo sea lineal para los tres defectos que se pueden detectar (ver Figura 7.127).

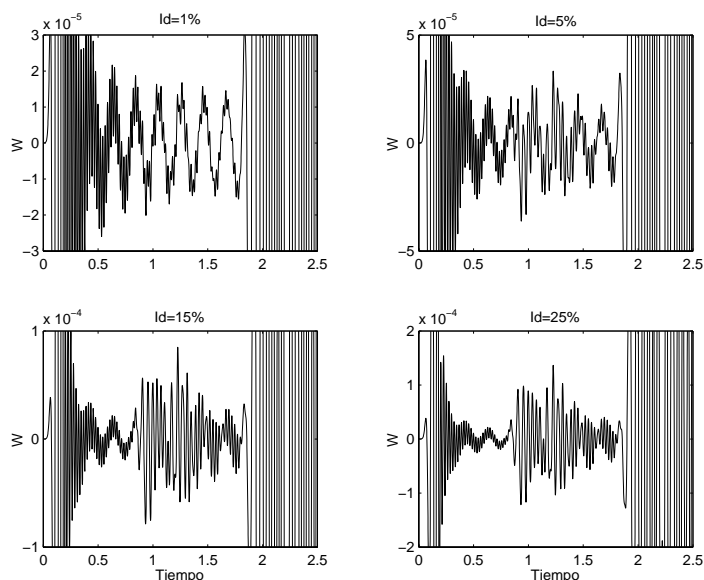


Figura 7.126. $W_{4.85}^d(t,23)$ en $x_0=0.13$ para varias Id .

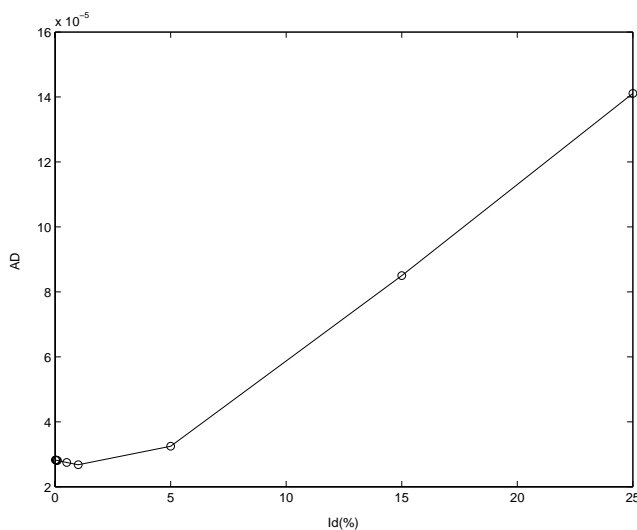


Figura 7.127. Variación de AD con Id para $W_{4.85}^d(t,23)$.

f.- Pulso gaussiano

En la Figura 7.128 se puede ver que con $W_g^d(t,40)$ se detecta en todas las intensidades, siendo la fuerza que mejores resultados proporciona. En la Figura 7.129 se ve que AD es lineal con Id para todos los defectos.

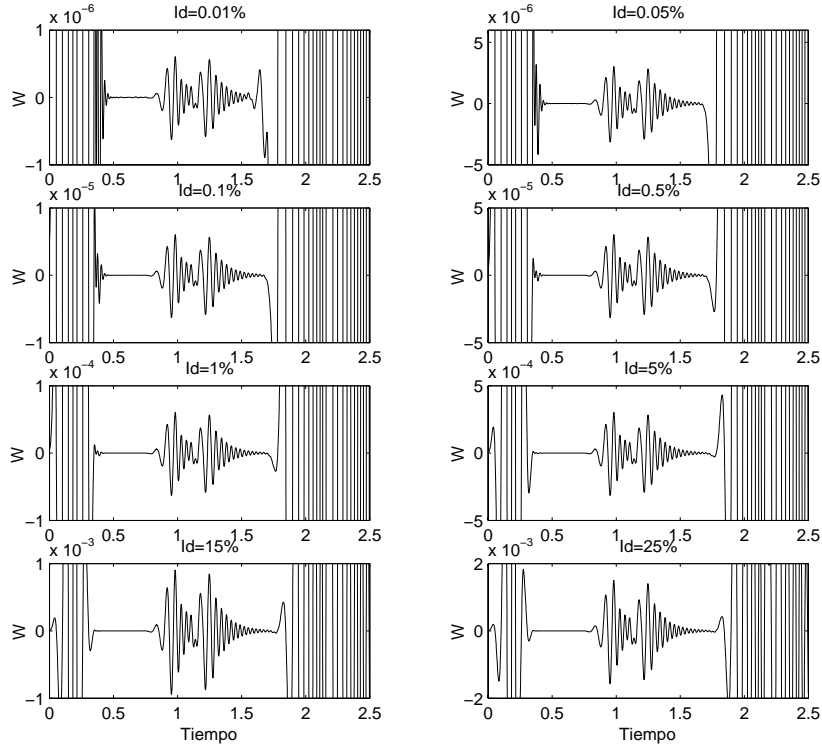


Figura 7.128. $W_g^d(t,40)$ en $x_0=0.13$ para todas las intensidades de defecto.

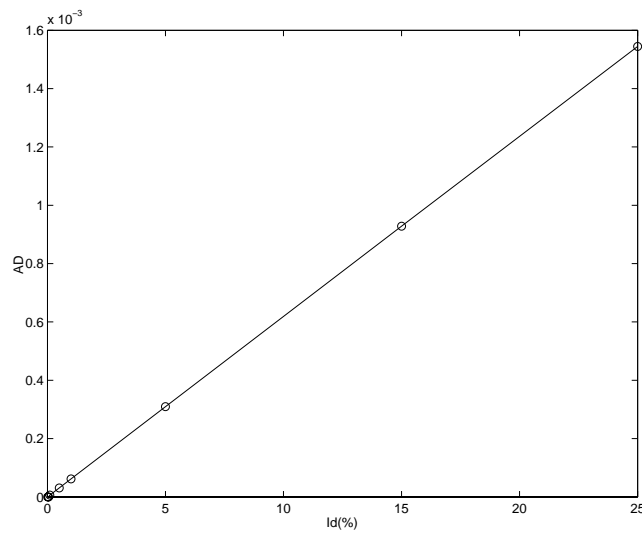


Figura 7.129. Variación de AD con Id para $W_g^d(t,40)$.

g.- Comparación entre las distintas fuerzas

Es evidente que con el pulso gaussiano se consiguen los mejores resultados, ya que permite detectar todas las intensidades de defecto estudiadas. El hecho de que esta fuerza produzca desplazamientos constantes a trozos en cada punto de la barra, hace que cualquier reflexión en el defecto sea más fácilmente apreciable, tanto sobre la señal si el defecto es muy grande, como con la TW si tiene una intensidad baja.

En cuanto a las fuerzas senoidales, con las frecuencias 0.7 y 1.3 se puede llegar a valores más bajos de Id , por lo es posible afirmar que ese rango de frecuencia es el más adecuado para la detección. Si usamos como criterio la amplitud de AD para decir cual de estas dos fuerzas es la mejor, esta sería la de 1.3, en la que se obtiene el doble de amplitud. Después de estas dos se encontraría la de 0.4, la de 3.14, y, por último, la de 4.85, que es con bastante diferencia la peor para la detección del defecto.

7.4.4.2.- Defecto tipo rigidez

a.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.4

Al hallar $W_{0.4}^d(t,50)$ para todas las Ir (Figura 7.130), encontramos que la perturbación se distingue en todos los casos, aunque para $Ir < 0.5\%$ aparecen unos pequeños picos antes de la llegada de la perturbación que pueden hacer dudar sobre cuál es el tiempo de llegada, o, para el caso de $Ir = 0.01\%$, hacer dudar acerca de la presencia de un defecto, pues el ruido de fondo empieza a ser del orden de las oscilaciones de la perturbación. Debido a esto, el límite de la detección lo pondremos en $Ir = 0.5\%$.

La variación de AD con Ir no es tan buena como en el caso de la densidad. En la Figura 7.131 se ve que en líneas generales hay una correlación lineal entre AD e Ir , aunque peor que en el caso de la densidad.

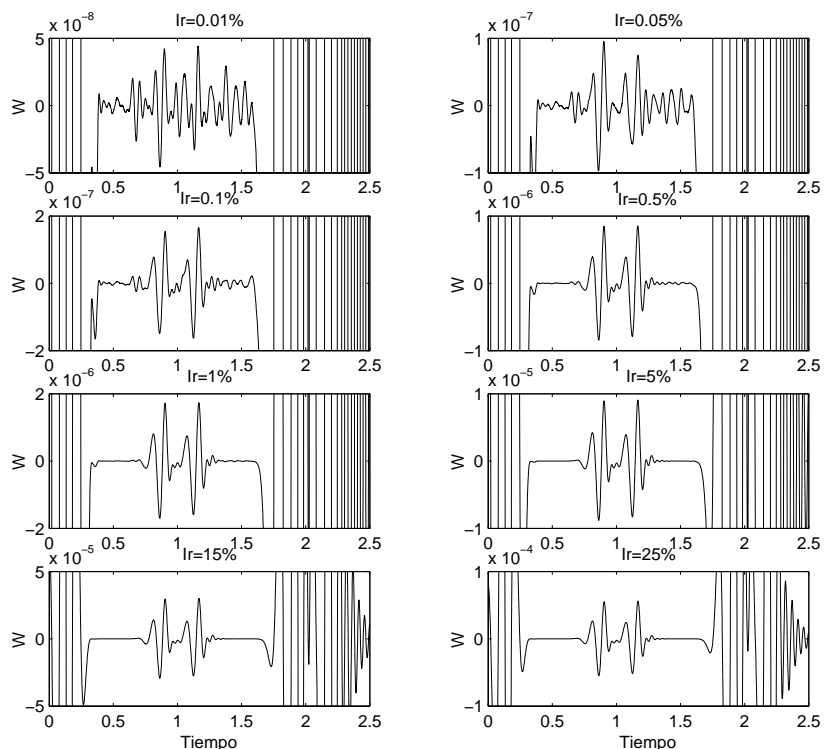


Figura 7.130. $W_{0.4}^d(t,50)$ en $x_0=0.13$ para varias las intensidades de defecto.

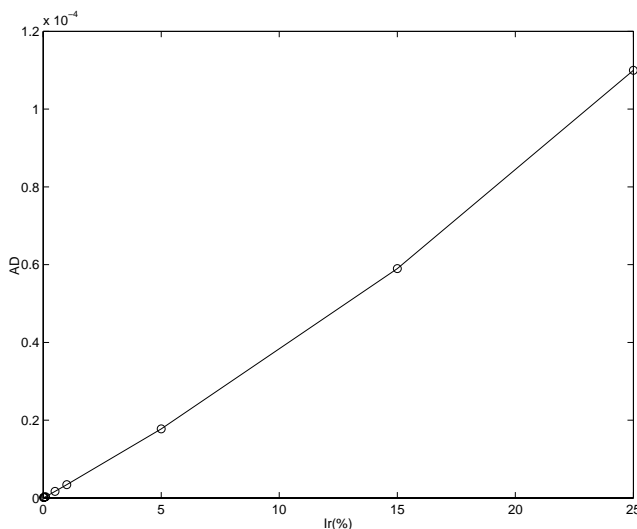


Figura 7.131. Variación de AD con Ir para $W_{0.4}^d(t,50)$.

b.- Fuerza senoidal de frecuencia 0.7

Con $W_{0.7}^d(t,50)$ (Figura 7.132) tenemos una situación parecida a la anterior, aunque en este caso para $Ir=0.05\%$ es más claro el paso de la perturbación, por lo que el límite de la detección se encontraría en $Ir=0.05\%$. Para $Ir=0.01\%$, aunque se aprecia la

perturbación, apenas destaca sobre el ruido de fondo. La variación de AD con Ir (Figura 7.133) sigue sin tener una linealidad perfecta, aunque la desviación es pequeña.

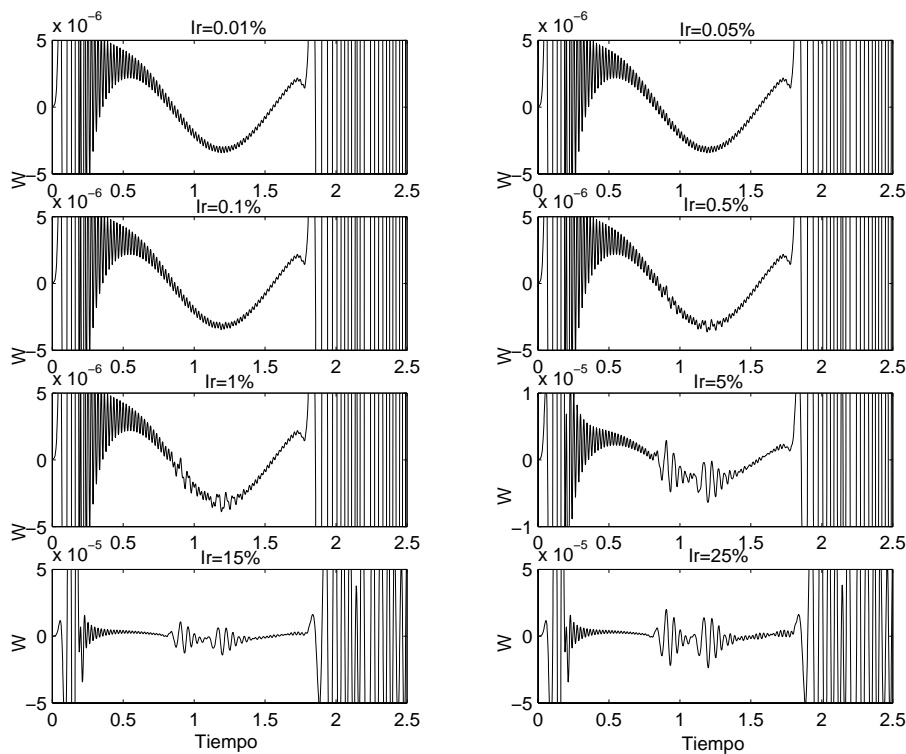


Figura 7.132. $W_{0.7}^d(t,50)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

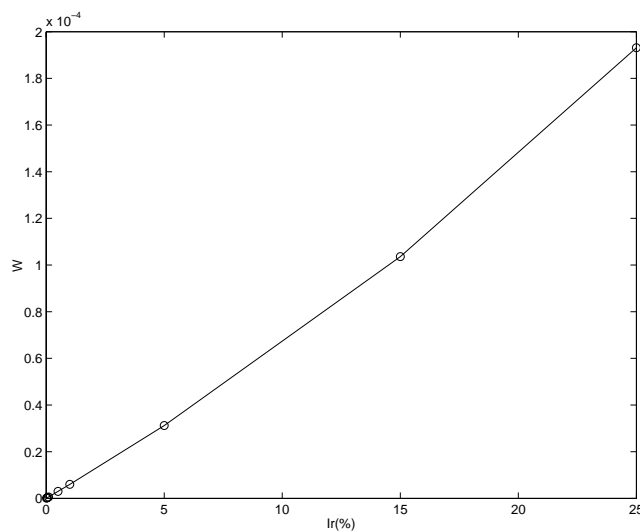


Figura 7.133. Variación de AD con Ir para $W_{0.7}^d(t,50)$.

c.- Fuerza senoidal de frecuencia 1.3

Hasta $Ir=0.05\%$ la detección con $W_{1.3}^d(t,38)$ es posible sin ningún tipo de problema (ver Figura 7.134). En $Ir=0.01\%$ hay unos pequeños picos en el tiempo de

paso de la perturbación, pero que destacan poco debido a la curvatura de $W_{1.3}^d(t,38)$, por lo que no lo consideramos como detectable. Al igual que con el defecto en la densidad, empieza a aparecer una curvatura en $W_{1.3}^d(t,38)$ cuando esta tiene poca amplitud, aunque no tanto como para enmascarar la presencia del defecto, excepto en $Ir=0.01\%$. La variación de AD con Ir (Figura 7.135) sigue comportándose de la misma forma que con las fuerzas anteriores.

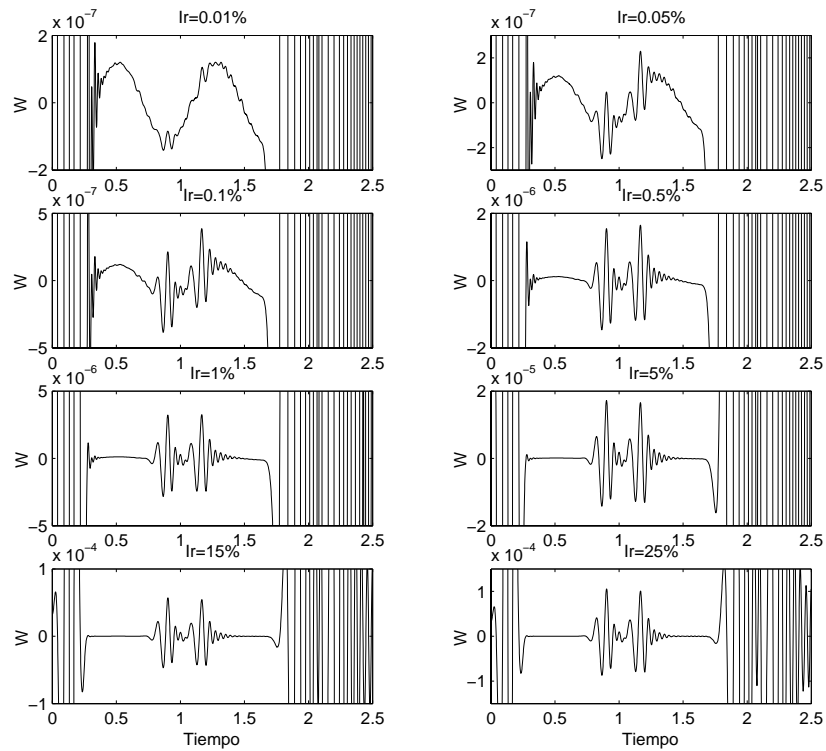


Figura 7.134. $W_{1.3}^d(t,38)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

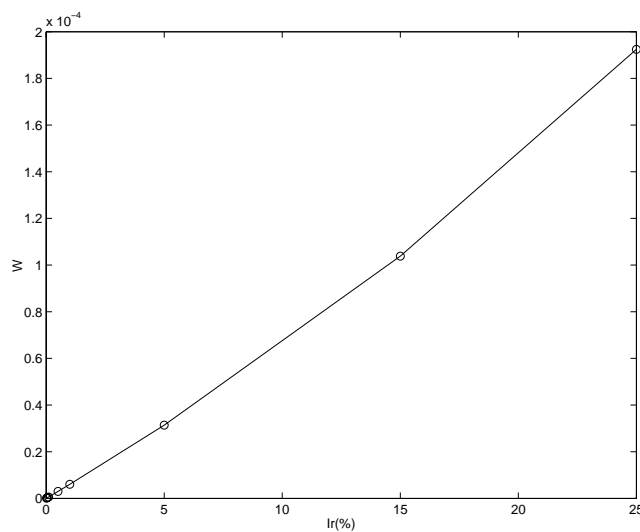


Figura 7.135. Variación de AD con Ir para $W_{1.3}^d(t,38)$.

d.- Fuerza senoidal de frecuencia 3.14

Al igual que con el defecto en la densidad, con esta frecuencia la detección empeora con respecto a las anteriores, siendo posible la detección solo hasta $Ir=0.5\%$ (Figuras 7.136 y 7.137), debido, como en el caso de la densidad, al aumento de la curvatura en la zona de amplitud baja. Al igual que con el defecto en la densidad, es necesario trabajar con escala 31, ya que para escalas superiores la ondulación se acentúa demasiado.

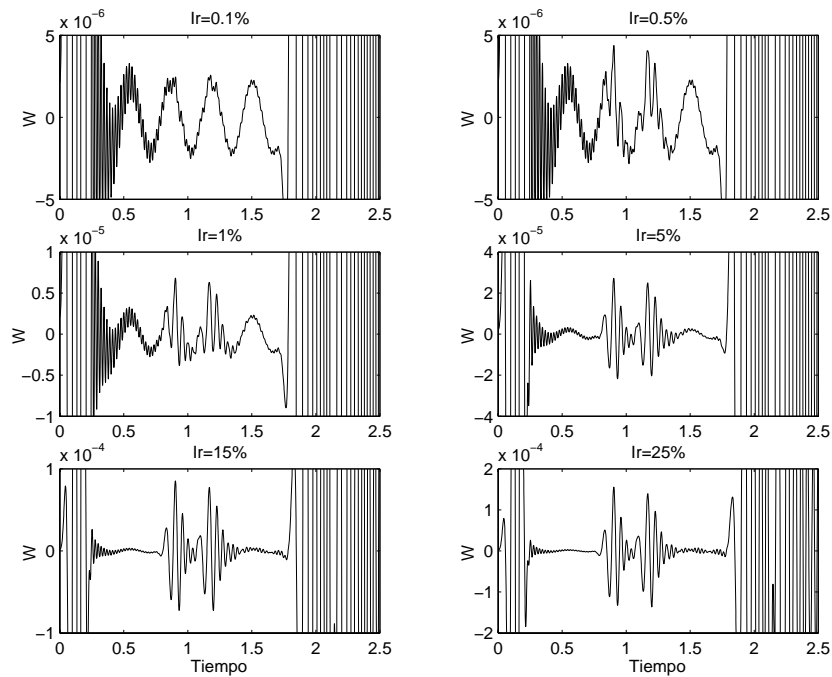


Figura 7.136. $W_{3.14}^d(t,31)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

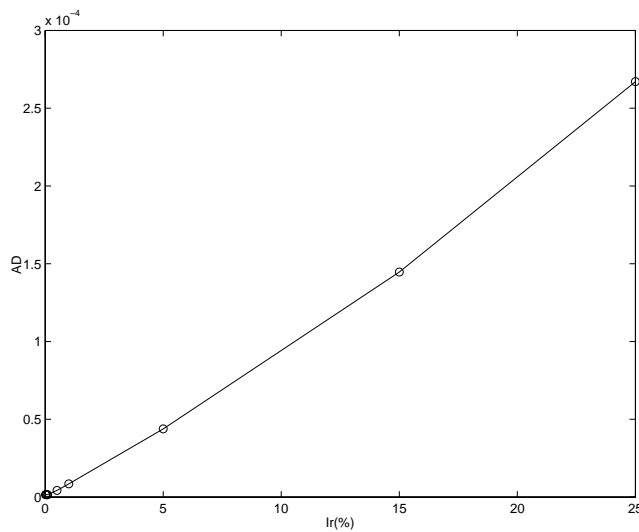


Figura 7.137. Variación de AD con Ir para $W_{3.14}^d(t,31)$.

e.- Fuerza senoidal de frecuencia 4.85

Para esta frecuencia la curvatura de la TW es muy pronunciada, por lo que la detección es más difícil (véase la Figura 7.138). La detección para $I_r=25\%$ y 15% es bastante clara, pero para $I_r=5\%$ es algo confusa, ya que se aprecia el paso de la perturbación como un cambio en la forma y tipo de las oscilaciones de alta frecuencia que aparecen con esta TW. Para $I_r=1\%$ no se distingue el paso de la perturbación. La variación de AD con I_r (Figura 7.139) es aproximadamente lineal para las tres intensidades de defecto más altas, las únicas para las que se detecta el defecto.

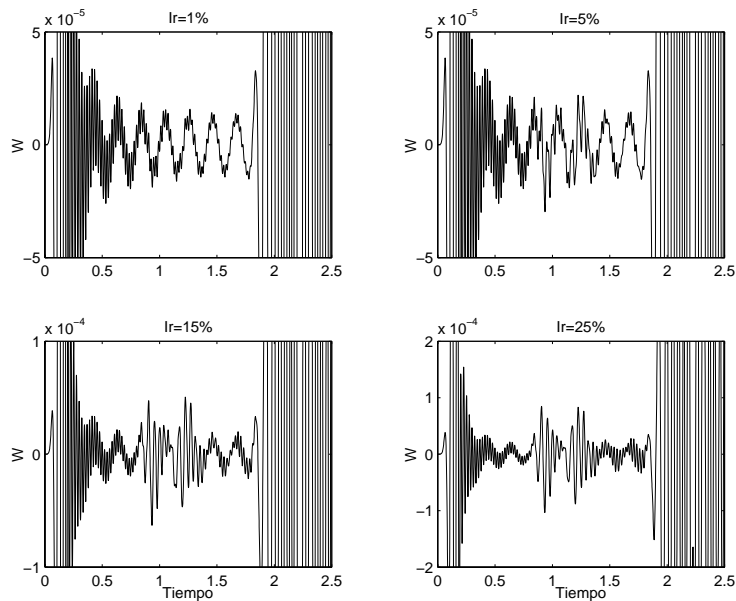


Figura 7.138. $W_{4.85}^d(t,23)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

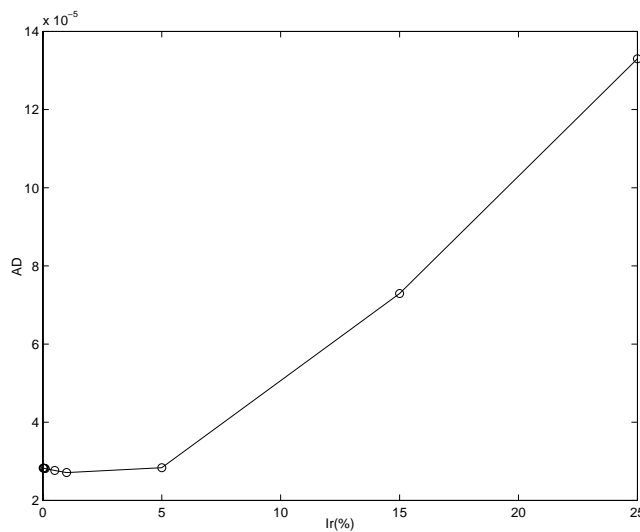


Figura 7.139. Variación de AD con I_r para $W_{4.85}^d(t,31)$.

f.- Pulso gaussiano

Igual que para la densidad, esta fuerza es la mejor para la detección. En la Figura 7.140 se muestra $W_g^d(t,50)$, que proporciona una detección del paso de la perturbación muy clara y precisa. En cambio, AD (Figura 7.141) sigue sin ser exactamente lineal, por lo que parece más un problema relacionado con el tipo de defecto y no con el tipo de fuerza.

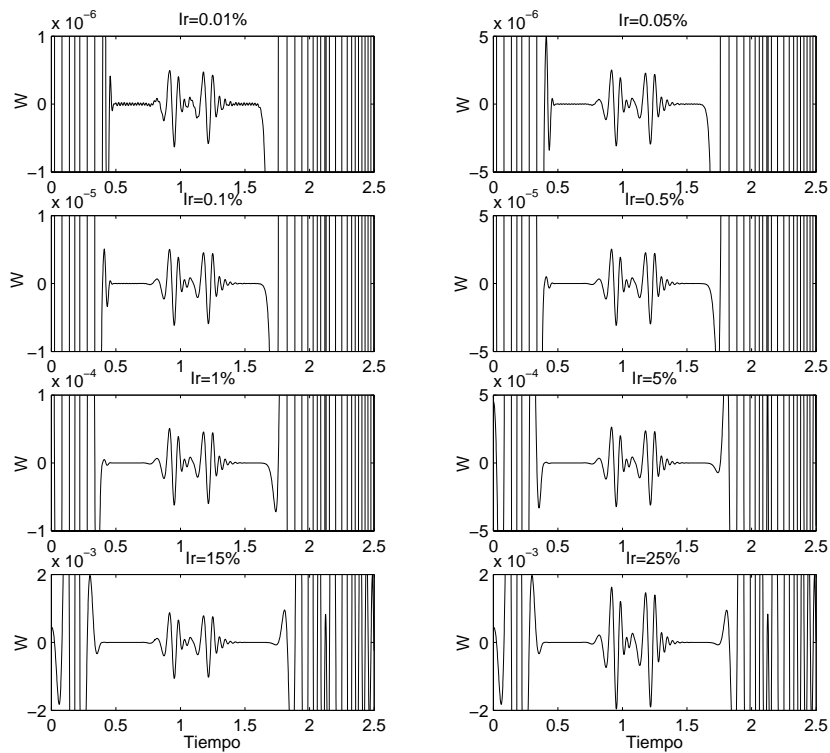


Figura 7.140. $W_g^d(t,50)$ en $x_0=0.13$ para varias intensidades de defecto.

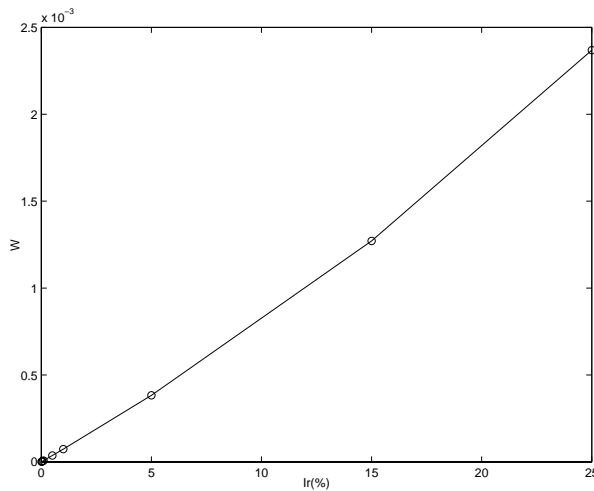


Figura 7.141. Variación de AD con Ir para $W_g^d(t,50)$.

g.- Comparación entre las distintas fuerzas

La aplicación del pulso gaussiano a la barra permite que con $W_g^d(t,50)$ sea posible la detección de todos los defectos considerados, por lo que es superior al resto de las fuerzas. Entre las fuerzas senoidales, las de frecuencia 0.7 y 1.3 son las que detectan el defecto para Ir más bajos, seguidas de las de 0.4 y 3.14, y por último la de frecuencia 4.85. Si se utiliza la amplitud de AD como criterio para afinar esa ordenación, esta sería de la siguiente forma: 0.7, 1.3, 3.14, 0.4 y 4.85.

7.5.- Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha investigado la utilización de la TW para la detección de defectos en una barra a partir de sus vibraciones longitudinales. El estudio se ha dividido en dos partes, según el tipo de vibraciones consideradas: en la primera se ha trabajado con vibraciones libres, generadas mediante la imposición como condiciones iniciales de los ocho primeros modos de vibración, y en la segunda con vibraciones forzadas, producidas por la aplicación de una fuerza en un extremo. Y, dentro de cada parte se ha estudiado la detección a partir de la TW tanto de las señales espaciales como de las temporales. En todos los casos ha sido posible la detección del defecto, variando únicamente la intensidad de defecto mínima requerida. En los siguientes apartados se resumen los resultados obtenidos al utilizar cada tipo de vibración y de señal.

7.5.1.- Resultados para las vibraciones libres

7.5.1.1.- TW de las señales espaciales

La primera parte del estudio ha consistido en determinar que función base y qué escala de la TW es la más adecuada para llevar a cabo nuestro propósito. La influencia de la función base no parece demasiado significativa, pudiéndose utilizar varias de ellas sin que aparezcan diferencias importantes entre ellas, pero el estudio indica que la que mejores resultados globales proporciona es la función base Symmlet 4, por lo que es la que hemos utilizado. En cuanto a la escala, los mejores resultados se han obtenido con escalas 2 y 4, comprobándose que, en general, cuanto menor es la escala más clara es la

detección y la amplitud de los picos, salvo a escala 1, en las que aparece mucho ruido de fondo.

Una vez determinadas la función base y la escala a utilizar, se ha investigado la capacidad de detección de la TW según el orden del modo utilizado y del tipo de defecto. Para el defecto en la **densidad**, se han podido detectar intensidades de defecto del 0.01%, encontrándose que hay dos factores que determinan la capacidad de detección de cada modo, que son:

- El orden del modo. A mayor orden mejor detección.
- La posición del defecto en relación a los vientres y nodos del **desplazamiento**. La proximidad a un vientre produce una mejor detección, mientras que la cercanía a un nodo la dificulta bastante.

Para el defecto en la rigidez, se han detectado también intensidades de defecto del 0.01%, y se ha descubierto que en la detección intervienen también el orden del modo y la posición del defecto, pero ahora en relación a los vientres y nodos del esfuerzo. Así pues, tenemos que los factores que determinan la capacidad de detección con el defecto en la **rigidez** son:

- El orden del modo. A mayor orden mejor detección.
- La posición del defecto en relación a los vientres y nodos del **esfuerzo**. La proximidad a un vientre produce una mejor detección, mientras que la cercanía a un nodo la dificulta bastante.

Así mismo, se ha estudiado la detección cuando el defecto se encuentra situado muy cerca de un extremo, lo cual dificulta algo la detección pero no la impide, y a la detección de dos defectos cercanos entre sí. En este último caso se ha descubierto que parece que influye la posición en la barra de dichos defectos en su detección, como era de esperar después de los resultados obtenidos al estudiar el orden del modo. Se ha podido discriminar entre ellos hasta una distancia de separación de 0.014, la menor que permite el modelo en red utilizado.

7.5.1.2.- *TW de las señales temporales*

Al estudiar la TW de la variación temporal del desplazamiento en distintos puntos de la barra se ha encontrado que, al trabajar con la función base Reverse-biorthogonal-6.8 y escalas 20 o 32 dependiendo del modo de vibración, aparecen oscilaciones que indican la llegada de una perturbación procedente del defecto, la cual puede reflejarse en los extremos y pasar de nuevo por el punto de observación. Este hecho nos permite la detección del defecto y, dado que conocemos la velocidad de onda en la barra, localizarlo. Así mismo, hemos descubierto que la amplitud de las oscilaciones está relacionada linealmente con la intensidad del defecto, lo que nos permite cuantificarlo también. De esta manera se detectan defectos en la densidad de hasta el 0.05% de intensidad, y de hasta el 0.01% cuando el defecto es en la rigidez.

7.5.2.- **Resultados para las vibraciones forzadas**

En el estudio realizado con vibraciones forzadas se ha simulado la aplicación de fuerzas armónicas de frecuencia 0.4, 0.7, 1.3, 3.14 y 4.85 y de una fuerza tipo pulso gaussiano, para obtener resultados en función del tipo de fuerza aplicada y, en el caso de las armónicas, de su frecuencia.

7.5.2.1.- *TW de las señales espaciales*

Hemos estudiado la TW de las señales espaciales en varios instantes de tiempo, encontrando que, en el caso de la fuerza armónica, la detección mejoraba al aumentar la frecuencia de la fuerza. Entre los instantes de tiempo considerados, en general la mejor detección se ha realizado, al trabajar con el defecto en la densidad, cuando se alcanza un máximo en el desplazamiento en la posición del defecto, mientras que con el defecto en la rigidez esto ocurre al alcanzarse un máximo en la fuerza. Por tanto, las características de la detección con las vibraciones forzadas son muy similares a las de la detección con vibraciones libres. En cuanto al pulso gaussiano, la detección ha sido únicamente posible para el instante de tiempo en el que el pulso llega a la posición del defecto, posiblemente debido al carácter abrupto de las vibraciones producidas por esta fuerza, lo que representa un serio inconveniente.

7.5.2.2.- TW de las señales temporales

Al realizar la TW de la variación temporal del desplazamiento en varios puntos, encontramos oscilaciones que marcan la llegada de la fuerza a dicho punto, tanto el primer paso de la fuerza como los siguientes debido a la reflexión en los extremos. Con una amplitud menor, aparecen otras oscilaciones que corresponden a reflexiones de la fuerza en el defecto que no se pueden apreciar directamente en el desplazamiento, oscilaciones que permiten de nuevo la detección del defecto y su localización, así como su cuantificación debido a la relación lineal que se ha encontrado entre la amplitud de estas oscilaciones y la intensidad de defecto. A diferencia de lo que sucede al trabajar con vibraciones libres, en este caso las oscilaciones provenientes del defecto no aparecen solo a una escala concreta, sino que se observan en un amplio rango de ellas.

En este caso la aplicación del pulso gaussiano produce los mejores resultados, pudiéndose detectar hasta una intensidad de defecto del 0.01% tanto con el defecto en la densidad como en la rigidez. Entre las fuerzas senoidales, las de frecuencias intermedias, $f=0.7$ y 1.3 , son las que mejor detectan el defecto, tanto en la densidad como en la rigidez, lo que sin duda es un resultado curioso que no está en consonancia con lo encontrado anteriormente y que habría que intentar explicar de forma teórica.

REFERENCIAS

- [7.1] A. Morassi “Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, 242, pp. 577-596 (2001).
- [7.2] J. Fernández-Sáenz, C. Navarro “Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach”. *Journal of Sound and Vibration*, 256, pp. 17-31 (2002).
- [7.3] G.M.L. Gladwell, A. Morassi “Estimating damage in a rod from changes in node positions”. *Inverse Problems in Engineering*, 7, pp. 215-233 (1999).
- [7.4] M. Dilena, A. Morassi “Identification of crack location in vibrating beams from changes in node positions”. *Journal of Sound and Vibration*, 255, pp. 915-930 (2002).
- [7.5] S. Vanlanduit, E. Parloo, P. Guillaume “Combined damage detection techniques”. *Journal of Sound and Vibration*, 266, pp. 815-831 (2003).
- [7.6] J.K. Sinha, M.I. Frinswell, S. Edwards “Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data”. *Journal of Sound and Vibration*, 251, pp. 13-38 (2002).
- [7.7] E. Douka, S. Loutridis, A. Trochidis “Crack identification in beams using wavelet analysis”. *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 3557-3569 (2003).
- [7.8] C.C. Chuang, L.W. Chen “Vibration damage detection of a Timoshenko beam by spatial wavelet based approach”. *Applied Acoustics*, 64, pp. 1217-1240.
- [7.9] S. Loutridis, E. Douka, A. Trochidis “Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis”. *Journal of Sound and Vibration*, 270, pp. 279-295 (2004).
- [7.10] S.T. Quek, Q. Wang, L. Zhang, K.K. Ang “Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, pp. 2899-2910 (2001).

- [7.11] C.J. Lu, Y.T. Hsu “Vibration analysis of an inhomogeneous string for damage detection by wavelet transform”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp. 745-754 (2002).
- [7.12] A.V. Ovanesova, L.E. Suárez “Applications of wavelet transform to damage detection in frame structures”. *Engineering Structures*, 26, pp. 39-49 (2004).
- [7.13] J. Tian, Z. Li, X. Su “Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves”. *Journal of Sound and Vibration*, 261, pp. 715-727 (2003).
- [7.14] A.V. Ovanesova “Applications of wavelets to crack detection in frame structures”. PhD Thesis. University of Puerto Rico. Puerto Rico (2000).

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE TRABAJO FUTURO

Aunque en cada capítulo de resultados se ha incluido un apartado de conclusiones, en este capítulo presentamos un resumen general de los resultados obtenidos y de las conclusiones alcanzadas, así como las perspectivas de trabajo futuro que se tienen en vista de estos resultados.

8.1.- Conclusiones

Como se expuso en el Capítulo 1, los objetivos de esta Memoria se pueden agrupar en dos. En primer lugar, estudiar la aplicabilidad del MSR a la simulación numérica de fenómenos ondulatorios y vibratorios, en concreto al proceso físico de vibraciones longitudinales y transversales en barras, como un primer paso para su posterior aplicación a estructuras o sistemas físicos más complejos, y comprobar la validez de los resultados obtenidos. En segundo lugar, estudiar la capacidad de la TW

para detectar defectos en una barra dañada a partir de sus vibraciones longitudinales, simuladas con el MSR, tanto con señales espaciales como temporales.

El primer objetivo se ha cumplido satisfactoriamente. En los Capítulos 5 y 6 se han desarrollado los modelos en red necesarios para la simulación con el MSR de las vibraciones en la barra, y se han validado dichos modelos para varios tipos de barra, estudiándose además la validez de los resultados obtenidos, tanto para vibraciones libres como forzadas. Y, dentro de estas, se ha comprobado el efecto según el tipo y las características de la fuerza aplicada y de la forma de la vibración producida. En general, se puede afirmar que, al igual que sucede con otros métodos numéricos, los resultados obtenidos son muy satisfactorios, siempre y cuando la variable que se quiera estudiar no sufra cambios muy bruscos de valor o varíe con una frecuencia muy alta con relación a las frecuencias naturales de la barra. Particularmente, en el caso de la aplicación de una fuerza tipo pulso, en las vibraciones longitudinales se producen funciones escalón en el desplazamiento y el esfuerzo, lo que provoca oscilaciones de Gibbs en la simulación, lo que da lugar a que no se obtengan resultados exactos. Este es, sin embargo, un caso muy extremo, ya que en los Capítulos 5 y 6 se han simulado satisfactoriamente casos con ciertas exigencias, como la aplicación de las condiciones iniciales del octavo modo de vibración en vibraciones longitudinales, o la aplicación de fuerzas armónicas de frecuencia relativamente elevada, tanto en las vibraciones longitudinales como transversales.

El segundo objetivo, la detección de defectos con la TW a partir de datos de vibraciones longitudinales, se ha cumplido con creces. En el Capítulo 7 se ha expuesto el estudio realizado con dos procesos físicos diferentes, vibraciones libres y forzadas, y, dentro de cada una de éstas, se han utilizado dos tipos de señales: espaciales (medidas a lo largo de la barra en un tiempo fijo) y temporales (medidas en una posición de la barra a lo largo del tiempo).

Al estudiar las señales espaciales de vibraciones libres, se ha encontrado que hay dos factores que influyen considerablemente en la detección del defecto. El primero es el orden del modo utilizado al imponer las condiciones iniciales, de forma que a mayor orden la detección es mejor, lo cual es algo ya conocido en la bibliografía. El segundo, es la posición del defecto en función del orden del modo y del tipo de defecto, ya que se

ha descubierto que un defecto en la densidad se detecta mejor cuando se encuentra cerca de un vientre del modo del *desplazamiento*, y que su detección es muy difícil cuando se encuentra cerca de un nodo, mientras que si el defecto es en la rigidez, la detección es mejor cuando se encuentra cerca de un vientre del *esfuerzo*, que coincide con un nodo del desplazamiento, mientras que la detección es más difícil si se encuentra cerca de un nodo del esfuerzo. Este hecho nos permite afirmar que no sería aconsejable la utilización de un único modo de vibración, sino que para asegurar una mejor detección es más adecuado realizar el estudio al menos dos veces con dos modos de vibración distintos, preferiblemente uno par y el otro impar. Además, el distinto comportamiento según el tipo de defecto que se tenga en función del modo permite su identificación de una manera sencilla.

Al analizar las señales temporales de vibraciones libres hemos encontrado un hecho novedoso y muy interesante, que es la presencia en la TW de perturbaciones procedentes del defecto, perturbaciones que, conocida la velocidad de propagación de la onda en el medio, permiten detectar, localizar e incluso cuantificar el defecto (hasta Nivel 3) a partir de medidas tomadas en una única posición de la barra. Esto es algo totalmente inédito en la bibliografía, ya que, en general, los estudios sobre TW en señales temporales se realizan mediante vibraciones forzadas provocadas por la aplicación de un pulso. A través de la investigación realizada hemos descubierto que la relación entre la detección con señales temporales y orden del modo es la misma que con señales espaciales, de modo que, en general, a mayor orden del modo mejor detección, y si el defecto es en la densidad, la detección es mejor cuando el defecto se encuentra cerca de un vientre del desplazamiento y peor cuando se encuentra cerca de un nodo, mientras que si el defecto es en la rigidez hay que tener en cuenta los vientres y nodos del esfuerzo.

En cuanto a la utilización de las vibraciones forzadas, la revisión bibliográfica muestra que, en general, los pocos estudios realizados han tratado sobre la aplicación de la TW a señales temporales provocadas por la aplicación de un pulso a la barra, sin estudiar el comportamiento de las señales espaciales ni la utilización de otro tipo de fuerzas, como las armónicas. En esta Memoria se ha visto cómo la detección de defectos a partir de señales espaciales de vibraciones forzadas es igualmente posible, encontrándose que, en general, la detección mejora al aumentar la frecuencia de la

fuerza armónica utilizada y cuando se consideran instantes de tiempo en los que el máximo del desplazamiento coincide con la posición del pulso. En el caso en que se utilicen fuerzas tipo pulso gaussiano, sin embargo, la detección se restringe a los instantes de tiempo en los que el pulso llega a la posición del defecto.

Al estudiar las señales temporales hemos encontrado un hecho similar al de las vibraciones libres, ya que en la TW aparecen perturbaciones procedentes de la reflexión de la fuerza aplicada en el defecto, reflexión que no es apreciable mediante la simple observación de la señal temporal. Estas perturbaciones están enmascaradas por el hecho de que la TW detecta también los instantes de tiempo en los que se producen los distintos pasos de la fuerza por el punto de medición, pero mediante un cambio de escala en el eje de ordenadas son fácilmente identificables y distinguibles en la mayoría de los casos. Así, tanto al trabajar con fuerzas armónicas como tipo pulso gaussiano se ha podido detectar, localizar y cuantificar el defecto de forma adecuada.

Hay que destacar que en el estudio llevado a cabo se han llegado a detectar intensidades de defecto del 0.01%, lo cual muestra lo increíblemente sensible que puede llegar a ser esta técnica. Es cierto que los datos utilizados son procedentes de simulaciones y sin la presencia de ruido, pero es evidente que el potencial de la TW para la detección de daño es enorme.

8.2.- Perspectivas de trabajo futuro

En cuanto a las perspectivas de trabajo futuro, esta Memoria deja abiertas varias líneas de investigación. El paso inmediato sería extender la investigación sobre detección de defectos para vibraciones transversales, y estudiar de qué forma se comporta la TW. En principio, la detección mediante señales espaciales debe ser muy similar a la realizada en esta Memoria, pero al utilizar señales temporales aparecerá el problema de que las vibraciones transversales de una barra son dispersivas, por lo que cada frecuencia de vibración se propagará a una velocidad distinta. Por tanto, la detección de defectos mediante señales temporales al utilizar vibraciones transversales requerirá de una metodología algo distinta a la usada en esta Memoria y que habrá que desarrollar.

Otras posibles líneas de investigación son:

- La extensión de este estudio a dos dimensiones, a membranas y placas, con sus problemas específicos debido al trabajo en una dimensión más.
- La adición de ruido a la señal de vibración, tanto blanco como coloreado, que seguramente dificultará la detección y obligará al uso de más técnicas de tratamiento de la señal para poder neutralizar su efecto.
- La incorporación de nuevos tipos de defectos, como un defecto en la rigidez y en la densidad al mismo tiempo, una fractura que se abra y se cierre según el desplazamiento en ella o defectos característicos de ciertos materiales, como puede ser una delaminación en un material compuesto.
- El estudio de la detección en una barra con varios tipos de defecto en ella.
- La comprobación de los resultados de este estudio (o de los resultantes de las anteriores líneas de investigación) mediante la realización de experimentos sobre barras o placas con defectos controlados. Este puede ser el paso más importante, ya que permitiría, por un lado, conocer los problemas prácticos que pueden aparecer con esta técnica, y por otro su aplicación a problemas reales que tienen una gran importancia económica o social.

PUBLICACIONES DEL AUTOR EN EL TEMA DE LA TESIS

ARTÍCULOS ACEPTADOS Y ENVIADOS

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Transversal waves in beams via the network simulation method”. *Journal of Sound and Vibration*, 283, pp. 997-1013 (2005).

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Damage detection in inhomogeneous rods by simulation of longitudinal waves via the network method and wavelet signal processing”. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*. Submitted (December 2004).

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Damage detection in rods by means of wavelet analysis of vibrations: influence of the mode order”. *Journal of Sound and Vibration*. Submitted (January 2005).

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Defect identification in rods via the spatial wavelet transform of forced vibrations”. *Applied Acoustics*. Submitted (March 2005).

ARTÍCULOS EN FASE DE REDACCIÓN

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Transient waves propagation in Timoshenko beams via the network simulation method”. *Journal of the Acoustical Society of America*. To be submitted (June/July 2005).

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “The temporal wavelet of free and forced vibrations applied to damage detection”. *Journal of Sound and Vibration*. To be submitted (June/July 2005).

COMUNICACIONES A CONGRESO

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Análisis de la Propagación de Ondas Elásticas por el Método de Simulación por Redes”. XXVIII Bienal de la Real Sociedad Española de Física, Sevilla (2002).

MT. García-Hernández, E. Castro, A. Gallego “Vibraciones longitudinales en barras: Simulación con el método de redes”. II Encuentro del Grupo Latinoamericano de Emisión Acústica (E-GLEA II), pp. 49-56, Buenos Aires, Argentina (2001).

E. Castro, M. T. García-Hernández, A. Gallego “Networks simulation method applied to vibration of beams”. Forum Acusticum, Sevilla (2003).

E. Castro, M.T. García-Hernández, A. Gallego “Transversal Elastic Waves Propagation In Rods Via The Network Simulation Method”. 3rd Pan-American Conference for Nondestructive Testing, Rio de Janeiro, Brasil (2003).

G. Rus, E. Castro, A. Gallego, J.L. Pérez-Aparicio, M.T. García-Hernández “Detection and location of damage in rods using wavelets of vibrations simulated by the NSM and FEM”. II European Workshop on Structural Health Monitoring, pp. 465-476, Munich, Alemania (2004).

E. Castro, A. Gallego, M.T. García-Hernández, “Damage detection in rods by network simulation method and temporal wavelet of temporal forced vibrations”. Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisboa, Portugal (2005).

M.T. García-Hernández, E. Castro, A. Gallego, “Estudio de las vibraciones transversales en vigas con el método de simulación por redes”. XXX Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física. Orense (2005).